MỤC LỤC

CHƯƠNG I. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC
BÀI 1. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

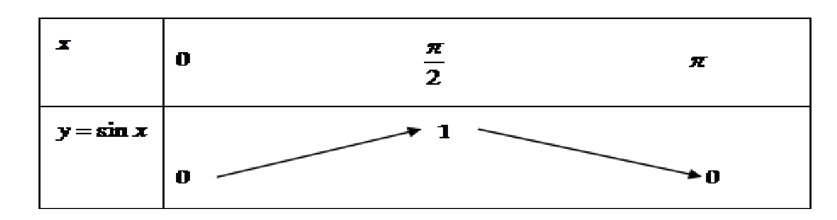
A. CƠ SỞ LÝ THUYẾT

1. Hàm số $y = \sin x$

- Có tập xác định $D = \mathbb{R}$;
- Là hàm số lẻ;
- Là hàm số tuần hoàn với chu kì 2π, $\sin(x + k2\pi) = \sin x$;
- Do hàm số $y = \sin x$ là hàm tuần hoàn với chu kỳ 2π nên ta chỉ cần khảo sát hàm số đó trên đoạn có độ dài 2π, chẳng hạn trên đoạn $[-\pi;\pi]$.

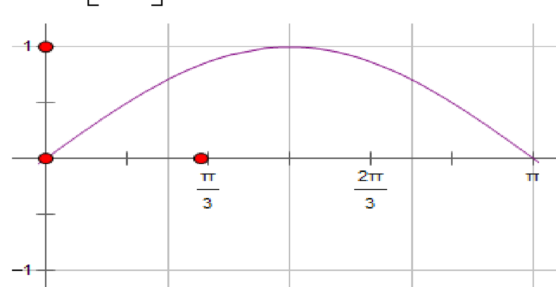
Khi vẽ đồ thị của hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $[-\pi;\pi]$ ta nên để ý rằng : Hàm số $y = \sin x$ là hàm số lẻ, do đó đồ thị của nó nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng. Vì vậy, đầu tiên ta vẽ đồ thị hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $[0;\pi]$

Bảng biến thiên:

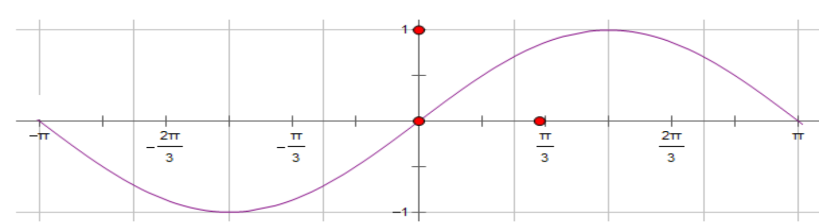


x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$y = \sin x$	0 ↗	1	↘ 0

Đồ thị hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $[0;\pi]$

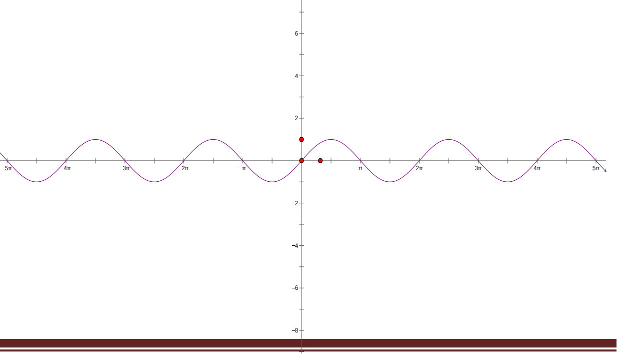


Lấy đối xứng phần đồ thị này qua gốc tọa độ lập thành đồ thị hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $[-\pi;\pi]$



Tịnh tiến phần đồ thị sang trái, sang phải những đoạn có độ dài $2\pi, 4\pi, 6\pi, \ldots$ thì ta được toàn bộ đồ thị hàm số $y = \sin x$. Đồ thị đó được gọi là một *đường hình sin.*

Hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ và nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)$.



Từ đó do tính tuần hoàn với chu kì 2π, hàm số $y=\sin x$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}+k2\pi;\frac{\pi}{2}+k2\pi\right)$ và nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}+k2\pi;\frac{3\pi}{2}+k2\pi\right)$

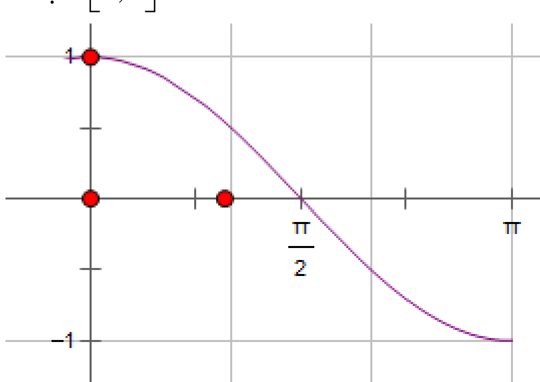
2. Hàm số $y=\cos x$

- Có tập xác định $D=\mathbb{R}$;
- Là hàm số chẵn;
- Là hàm số tuần hoàn với chu kì 2π;
- Do hàm số $y=\cos x$ là hàm tuần hoàn với chu kỳ 2π nên ta chỉ cần khảo sát hàm số đó trên đoạn có độ dài 2π, chẳng hạn trên đoạn $\left[-\pi;\pi\right]$.

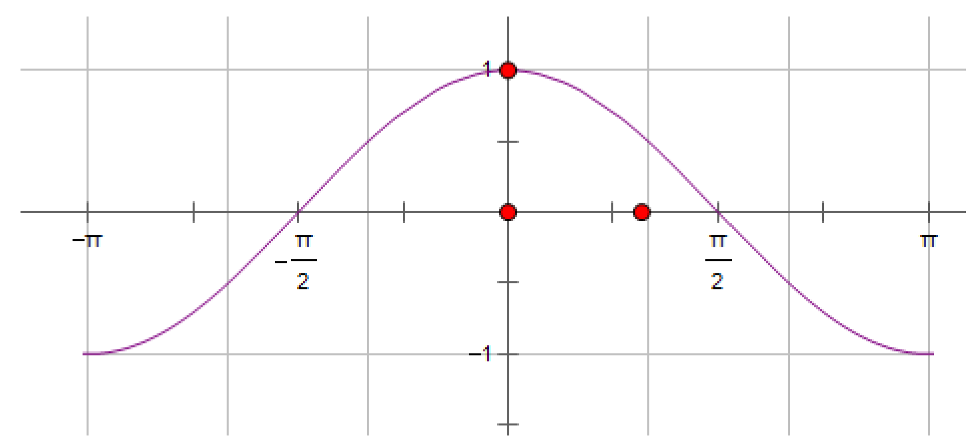
Khi vẽ đồ thị của hàm số $y=\cos x$ trên đoạn $\left[-\pi;\pi\right]$ ta nên để ý rằng : Hàm số $y=\cos x$ là hàm số chẵn, do đó đồ thị của nó nhận trục Oy làm trục đối xứng. Vì vậy, đầu tiên ta vẽ đồ thị hàm số $y=\cos x$ trên đoạn $\left[0;\pi\right]$

Bảng biến thiên:

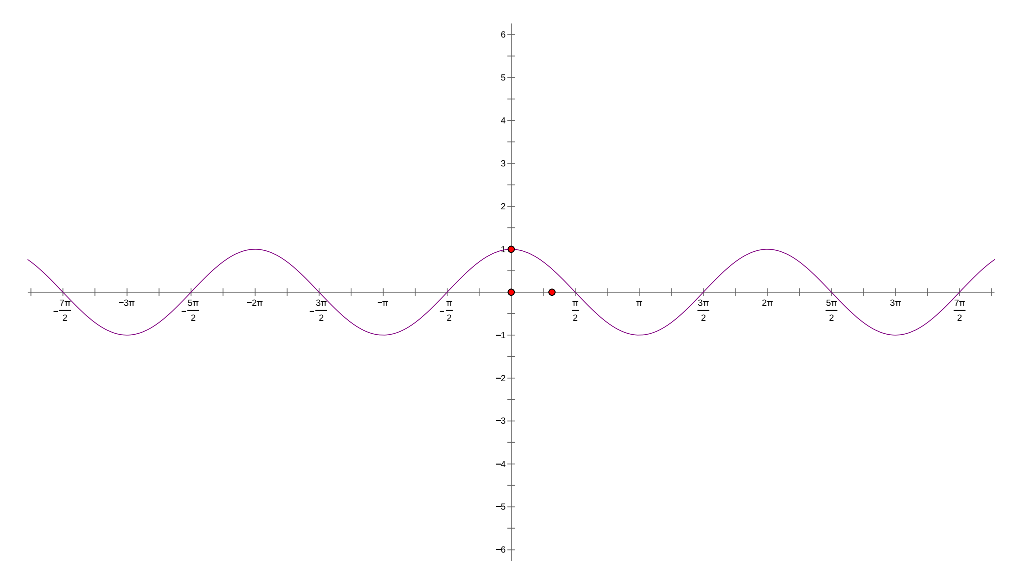
Đồ thị hàm số $y=\cos x$ trên đoạn $\left[0;\pi\right]$



Lấy đối xứng phần đồ thị này qua trục Oy lập thành đồ thị hàm số $y=\cos x$ trên đoạn $\left[-\pi;\pi\right]$



Tịnh tiến phần đồ thị sang trái, sang phải những đoạn có độ dài $2\pi, 4\pi, 6\pi, \ldots$ thì ta được toàn bộ đồ thị hàm số $y=\cos x$. Đồ thị đó được gọi là một *đường hình sin*



Hàm số $\mathrm{y}=\cos \mathrm{x}$ đồng biến trên khoảng $(-\pi;0)$ và nghịch biến trên khoảng $(0;\pi)$. Từ đó do tính tuần hoàn với chu kì 2π, hàm số $y=\sin x$ đồng biến trên khoảng $(-\pi+k2\pi;\ k2\pi)$ và nghịch biến trên khoảng $(k2\pi;\ \pi+k2\pi)$.

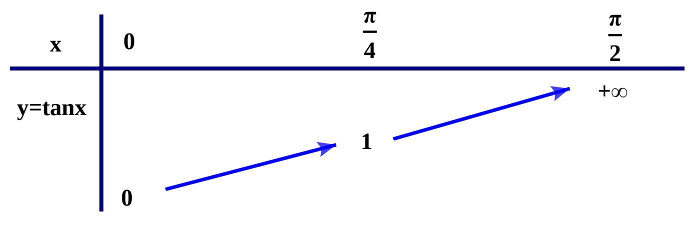
3. Hàm số $\mathrm{y}=\tan \mathrm{x}$

- Có tập xác định là $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$;
- Có tập giá trị là $\mathbb{R}$;
- Là hàm số lẻ;
- Hàm số tuần hoàn với chu kỳ π, $\tan(x+k\pi)=\tan x$;

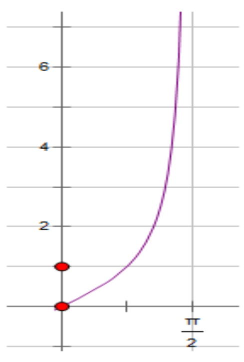
Do hàm số $\mathrm{y}=\tan \mathrm{x}$ là hàm tuần hoàn với chu kỳ π nên ta chỉ cần khảo sát hàm số đó trên đoạn có độ dài π, chẳng hạn trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

Khi vẽ đồ thị của hàm số $\mathrm{y}=\tan \mathrm{x}$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ ta nên để ý rằng : Hàm số $\mathrm{y}=\tan \mathrm{x}$ là hàm số lẻ, do đó đồ thị của nó nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng. Vì vậy, đầu tiên ta vẽ đồ thị hàm số $y=\tan x$ trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

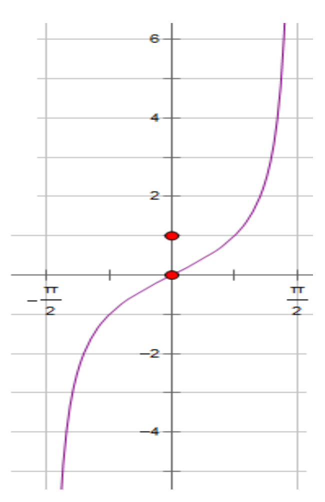
Bảng biến thiên:



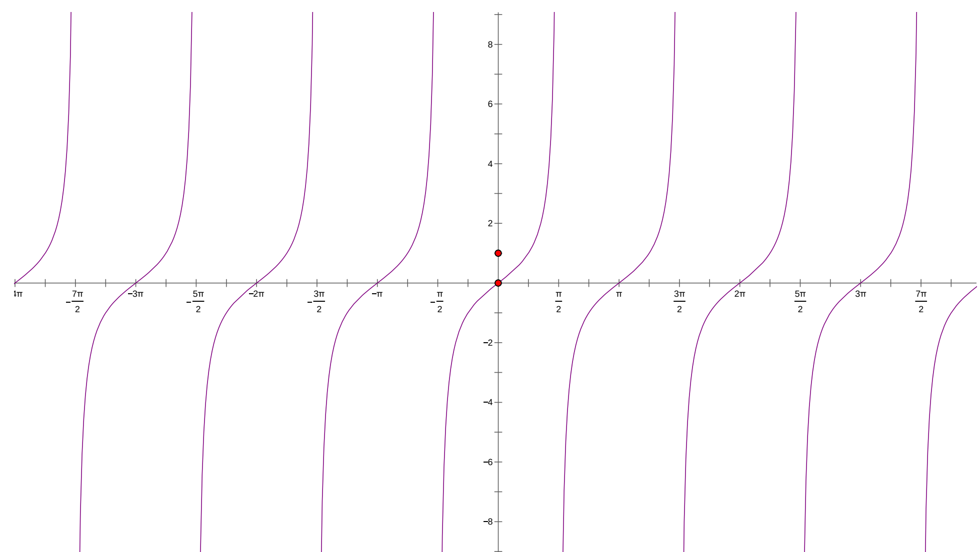
Đồ thị hàm số $y=\tan x$ trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$



Lấy đối xứng phần đồ thị này qua gốc tọa độ lập thành đồ thị hàm số $y = \tan x$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$



Tịnh tiến phần đồ thị sang trái, sang phải những đoạn có độ dài $\pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$ thì ta được toàn bộ đồ thị hàm số $y = \tan x$.



Hàm số $y = \tan x$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. Từ đó do tính tuần hoàn với chu kỳ π nên hàm số $y = \tan x$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$.

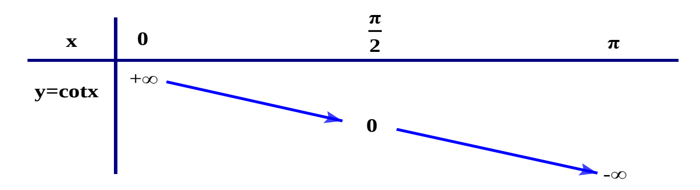
Đồ thị hàm số $y = \tan x$ nhận mỗi đường thẳng $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ làm một đường tiệm cận (đứng).

4. Hàm số $y = \cot x$

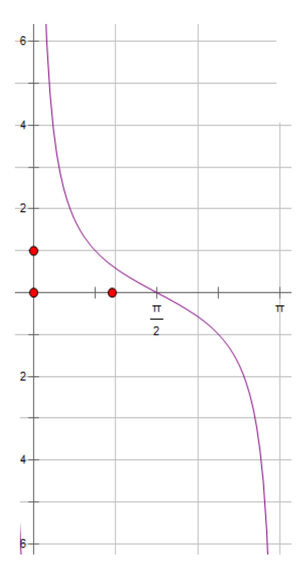
- Có tập xác định là $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$;
- Có tập giá trị là $\mathbb{R}$;
- Là hàm số lẻ;
- Hàm số tuần hoàn với chu kỳ π, $\cot(x + k\pi) = \cot x$;

Do hàm số $y = \cot x$ là hàm tuần hoàn với chu kỳ π nên ta chỉ cần khảo sát hàm số đó trên đoạn có độ dài π, chẳng hạn trên đoạn $[0; \pi]$.

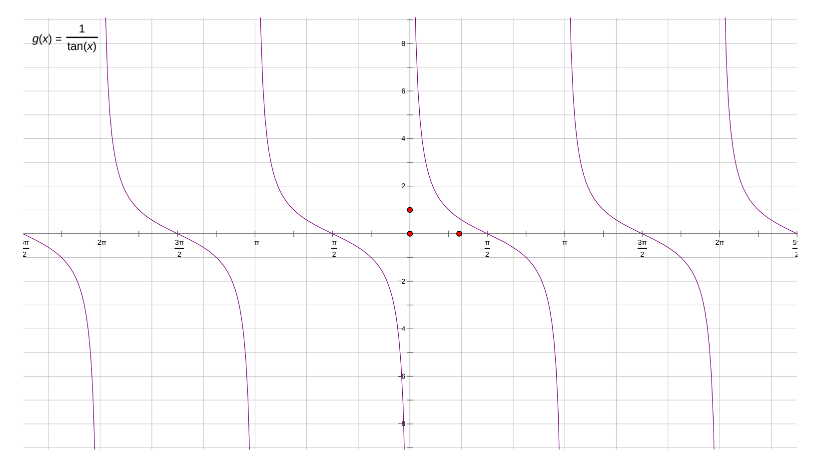
Bảng biến thiên:



Đồ thị hàm số $y = \cot x$ trên $[0; \pi]$



Tịnh tiến phần đồ thị sang trái, sang phải những đoạn có độ dài $\pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$ thì ta được toàn bộ đồ thị hàm số $y = \cot x$.



Hàm số $y = \cot x$ nghịch biến trên khoảng $(0;\ \pi)$. Từ đó do tính tuần hoàn với chu kỳ π nên hàm số $y = \cot x$ đồng biến trên khoảng $(k\pi;\ \pi + k\pi)$.

Đồ thị hàm số $y = \cot x$ nhận mỗi đường thẳng $x = k\pi$ làm một đường tiệm cận (đứng).

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Tìm tập xác định của hàm số

Phương pháp: Để tìm tập xác định của hàm số ta cần lưu ý các điểm sau

- $y = \sqrt{u(x)}$ có nghĩa khi và chỉ khi $u(x)$ xác định và $u(x) \geq 0$.
- $y = \frac{u(x)}{v(x)}$ có nghĩa khi và chỉ $u(x)$, $v(x)$ xác định và $v(x) \neq 0$.
- $y = \frac{u(x)}{\sqrt{v(x)}}$ có nghĩa khi và chỉ $u(x)$, $v(x)$ xác định và $v(x) > 0$.
- Hàm số $y = \sin x$, $y = \cos x$ xác định trên $\mathbb{R}$ và tập giá trị của nó là:
  $-1 \leq \sin x \leq 1$; $-1 \leq \cos x \leq 1$.
  Như vậy, $y = \sin[u(x)]$, $y = \cos[u(x)]$ xác định khi và chỉ khi $u(x)$ xác định.
- $y = \tan u(x)$ có nghĩa khi và chỉ khi $u(x)$ xác định và $u(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- $y = \cot u(x)$ có nghĩa khi và chỉ khi $u(x)$ xác định và $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

CÁC VÍ DỤ RÈN LUYỆN KĨ NĂNG

Ví dụ 1. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y = \sin\left(\frac{5x}{x^2 - 1}\right)$;   b) $y = \cos\sqrt{4 - x^2}$;   c) $y = \sqrt{\sin x}$;   d) $y = \sqrt{2 - \sin x}$.

Giải

a) Hàm số $y = \sin\left(\frac{5x}{x^2 - 1}\right)$ xác định $\Leftrightarrow x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 1$.

Vậy $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$.

b) Hàm số $y=\cos\sqrt{x^2-4}$ xác định $\Leftrightarrow$ $4-x^2\ge 0\Leftrightarrow x^2\le 4\Leftrightarrow -2\le x\le 2$.

Vậy $D=\{x\in\mathbb{R}\mid -2\le x\le 2\}$.

c) Hàm số $y=\sqrt{\sin x}$ xác định $\Leftrightarrow \sin x\ge 0\Leftrightarrow k2\pi\le x\le \pi+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Vậy $D=\{x\in\mathbb{R}\mid k2\pi\le x\le \pi+k2\pi, k\in\mathbb{Z}\}$.

d) Ta có: $-1\le \sin x\le 1\Rightarrow 2-\sin x>0$.

Do đó, hàm só luôn luôn xác định hay $D=\mathbb{R}$.

Ví dụ 2. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y=\tan\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$; b) $y=\cot\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$; c) $y=\frac{\sin x}{\cos(x-\pi)}$; d) $y=\frac{1}{\tan x-1}$.

Giải

a) Hàm số $y=\tan\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ xác định $\Leftrightarrow x-\frac{\pi}{6}\ne\frac{\pi}{2}+k\pi\Leftrightarrow x\ne\frac{2\pi}{3}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Vậy $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{2\pi}{3}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

b) Hàm số $y=\cot\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ xác định $\Leftrightarrow x+\frac{\pi}{3}\ne k\pi\Leftrightarrow x\ne-\frac{\pi}{3}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Vậy $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{-\pi}{3}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

c) Hàm số $y=\frac{\sin x}{\cos(x-\pi)}$ xác định $\Leftrightarrow \cos(x-\pi)\ne 0\Leftrightarrow x-\pi\ne\frac{\pi}{2}+k\pi\Leftrightarrow x\ne\frac{3\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Vậy $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{3\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

d) Hàm số $y=\frac{1}{\tan x-1}$ xác định $\tan x\ne 1\Leftrightarrow x\ne\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Vậy $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Ví dụ 3. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y=\cos 2x+\frac{1}{\cos x}$; b) $y=\frac{3\cos 2x}{\sin 3x\cos 3x}$.

Giải

a) Hàm số $y=\cos 2x+\dfrac{1}{\cos x}$ xác định $\Leftrightarrow \cos x\ne 0\Leftrightarrow x\ne \dfrac{\pi}{2}+k\pi, k\in \mathbb{Z}$.

Vậy $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

b) Hàm số $y=\dfrac{3\cos 2x}{\sin 3x\cos 3x}$ xác định $\Leftrightarrow$

$\sin 3x\cos 3x\ne 0\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\sin 6x\ne 0\Leftrightarrow 6x\ne k\pi\Leftrightarrow x\ne \dfrac{k\pi}{6}, k\in\mathbb{Z}$.

Vậy $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{k\pi}{6}, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Ví dụ 4. Tìm m để hàm số sau đây xác định trên $\mathbb{R}$: $y=\sqrt{2m-3\cos x}$.

Giải

Hàm số đã cho xác định trên R khi và chỉ khi $2m-3\cos x\ge 0\Leftrightarrow \cos x\le \dfrac{2m}{3}$

Bất đẳng thức trên đúng với mọi x khi $1\le \dfrac{2m}{3}\Leftrightarrow m\ge \dfrac{3}{2}$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BT 1. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y=\sqrt{1-\cos^2 x}$; b) $y=\sqrt{\dfrac{2+\sin x}{1+\cos x}}$.

Giải

a) Nhận thấy $0\le \cos^2 x\le 1$ nên $1-\cos^2 x\ge 0, \forall x\in\mathbb{R}$.
Vậy $D=\mathbb{R}$.

b) Hàm số $y=\sqrt{\dfrac{2+\sin x}{1+\cos x}}$ xác định $\Leftrightarrow 1+\cos x\ne 0\Leftrightarrow x\ne \pi+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.
Vậy $D=\mathbb{R}\setminus\{\pi+k2\pi, k\in\mathbb{Z}\}$.

BT 2. Tìm tập xác định của các hàm số sau

a) $y=\tan\left(3x-\dfrac{\pi}{3}\right)$; b) $y=\tan 6x+\dfrac{1}{\cot 3x}$;

c) $y=\dfrac{\tan 2x}{\sin x+1}+\cot\left(3x+\dfrac{\pi}{6}\right)$; d) $y=\dfrac{\tan 5x}{\sin 4x-\cos 3x}$.

Giải

a) Hàm số $y=\tan\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)$ xác định $\Leftrightarrow 3x-\frac{\pi}{3}\neq\frac{\pi}{2}+k\pi \Leftrightarrow x\neq\frac{5\pi}{18}+k\frac{\pi}{3},k\in\mathbb{Z}$.

Vậy $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{5\pi}{18}+\frac{k\pi}{3},k\in\mathbb{Z}\right\}$.

b) Hàm số $y=\tan 6x+\frac{1}{\cot 3x}$ xác định

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\cos6x\neq0\\ \sin3x\neq0\\ \cos3x\neq0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos6x\neq0\\ \sin6x\neq0\end{cases}\Leftrightarrow \sin12x\neq0\Leftrightarrow x\neq\frac{k\pi}{2},k\in\mathbb{Z}.$$

Vậy $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{k\pi}{12},k\in\mathbb{Z}\right\}$.

c) Hàm số $y=\frac{\tan 2x}{\sin x+1}+\cot\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)$ xác định khi và chỉ khi

$$\begin{cases}\sin x\neq-1\\ \cos2x\neq0\\ \sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)\neq0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq-\frac{\pi}{2}+k2\pi\\ x\neq\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\\ x\neq-\frac{\pi}{18}+\frac{k\pi}{3}\end{cases},k\in\mathbb{Z}.$$

Vậy $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{\pi}{2}+k2\pi,\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2},-\frac{\pi}{18}+\frac{k\pi}{3};k\in\mathbb{Z}\right\}$.

d) Hàm số $y=\frac{\tan 5x}{\sin 4x-\cos 3x}$ xác định khi và chỉ khi

$$\begin{cases}\cos5x\neq0\\ \sin4x\neq\cos3x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-4x\right)\neq\cos3x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq\frac{\pi}{10}+\frac{k\pi}{5}\\ \frac{\pi}{2}-4x\neq3x+k2\pi\\ \frac{\pi}{2}-4x\neq-3x+k2\pi\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq\frac{\pi}{10}+\frac{k\pi}{5}\\ 7x\neq\frac{\pi}{2}-k2\pi\\ x\neq\frac{\pi}{2}-k2\pi\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq\frac{\pi}{10}+\frac{k\pi}{5}\\ x\neq\frac{\pi}{14}-\frac{k2\pi}{7}\\ x\neq\frac{\pi}{2}-k2\pi\end{cases},k\in\mathbb{Z}$$

Vậy $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{10}+\frac{k\pi}{5},\frac{\pi}{14}-\frac{k2\pi}{7},\frac{\pi}{2}-k2\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}$.

BT 3. Tìm m để hàm số sau xác định trên $\mathbb{R}$: $y=\frac{3x}{\sqrt{2\sin^2x-m\sin x+1}}$.

Giải

Hàm số xác định trên R khi và chỉ khi: $2\sin^2x-m\sin x+1>0$ với mọi $t\in[-1;1]$

Ta có: $\Delta=m^2-8$

- TH 1: $\Delta<0\Leftrightarrow m^2-8<0\Leftrightarrow -2\sqrt{2}<m<2\sqrt{2}$. Khi đó $f(t)>0,\forall t$ (thỏa mãn)
- TH 2: $\Delta=0\Leftrightarrow m^2-8=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-2\sqrt{2}\\m=2\sqrt{2}\end{array}\right.$
  - Với $m=-2\sqrt{2}$ thì $f(t)=2t^2-2\sqrt{2}t+1=\left(\sqrt{2}t-1\right)^2$

    Ta thấy $f(t)=0$ tại $t=\frac{1}{\sqrt{2}}\in[-1;1]$ (không thỏa mãn)
  - Với $m=2\sqrt{2}$ thì $f(t)=2t^2+2\sqrt{2}t+1=\left(\sqrt{2}t+1\right)^2$

    Ta thấy $f(t)=0$ tại $t=-\frac{1}{\sqrt{2}}\in[-1;1]$ (không thỏa mãn)
- TH 3: $\Delta>0\Leftrightarrow m^2-8>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m<-2\sqrt{2}\\m>2\sqrt{2}\end{array}\right.$ khi đó tam thức $f(t)$ có hai nghiệm phân biệt t_1,t_2 (giả sử $t_1<t_2$)

  Ta có bảng xét dấu:

t	$-\infty$		t_1		t_2		$+\infty$
f(t)		+	0	-	0	+	

Từ bảng xét dấu ta thấy:

$f(t)=2t^2-mt+1>0,\forall t\in[-1,1]\Leftrightarrow t_1>1$ hoặc $t_2<1$

Với $t_1>1\Leftrightarrow\frac{m-\sqrt{m^2-8}}{4}>1\Leftrightarrow\sqrt{m^2-8}<m-4\Leftrightarrow\begin{cases}m>4\\m<3\end{cases}$ (Vô nghiệm)

Với $t_2 < -11 \Leftrightarrow \dfrac{m+\sqrt{m^2-8}}{4} < -1 \Leftrightarrow \sqrt{m^2-8} < -m-4 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -4 \\ m > -3 \end{cases}$ (Vô nghiệm)

Vậy giá trị m cần tìm là $-2\sqrt{2} < m < 2\sqrt{2}$.

Dạng 2. Xét tính chẵn lẻ của hàm số

Phương pháp: Giả sử ta cần xét tính chẵn, lẻ của hàm số $y = f(x)$

- Bước 1: Tìm tập xác định D của hàm số; kiểm chứng D là tập đối xứng qua số 0 tức là $\forall x, x \in D \Rightarrow -x \in D$ (1)
- Bước 2: Tính $f(-x)$ và so sánh $f(-x)$ với $f(x)$
  - Nếu $f(-x) = f(x)$ thì $f(x)$ là hàm số chẵn trên D (2)
  - Nếu $f(-x) = -f(x)$ thì $f(x)$ là hàm số lẻ trên D (3)

Chú ý:

- Nếu điều kiện (1) không nghiệm đúng thì $f(x)$ là hàm không chẵn và không lẻ trên D;
- Nếu điều kiện (2) và (3) không nghiệm đúng, thì $f(x)$ là hàm không chẵn và cũng không lẻ trên D.

Lúc đó, để kết luận $f(x)$ là hàm không chẵn và không lẻ ta chỉ cần chỉ ra điểm $x_0 \in D$ sao cho $\begin{cases} f(-x_0) \neq f(x_0) \\ f(-x_0) \neq -f(x_0) \end{cases}$

CÁC VÍ DỤ RÈN LUYỆN KĨ NĂNG

Ví dụ 1. Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số sau:

a) $y = \sin 2x$; b) $y = \tan|x|$; c) $y = \sin^4 x$.

Giải

a) TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Suy ra $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$.

Ta có: $f(-x) = \sin(-2x) = -\sin 2x = -f(x)$.

Do đó hàm số đã cho là hàm số lẻ.

b) TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\pm\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$. Suy ra $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$.

Ta có: $f(-x) = \tan|-x| = \tan|x| = f(x)$.

Do đó hàm số đã cho là hàm số chẵn.

c) TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Suy ra $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$.

Ta có: $f(-x) = \sin^4(-x) = \sin^4 x = f(x)$.

Do đó hàm số đã cho là hàm số chẵn.

Ví dụ 2. Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số sau:

a) y = tanx + cotx; b) y = sinx.cosx.

Giải

a) TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{k\pi}{2},k\in\mathbb{Z}\right\}$. Suy ra $\forall x\in D\Rightarrow -x\in D$

Ta có: $f(-x)=\tan(-x)+\cot(-x)=-\tan x-\cot x=-(\tan x+\cot x)=-f(x)$

Do đó hàm số đã cho là hàm số lẻ.

b) TXĐ: $D=\mathbb{R}$. Suy ra $\forall x\in D\Rightarrow -x\in D$

Ta có: $f(-x)=\sin(-x).\cos(-x)=-\sin x\cos x=-f(x)$

Do đó hàm số đã cho là hàm số lẻ.

Ví dụ 3. Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số sau:

a) y = 2sinx + 3; b) $y=\sin x+\cos x$.

Giải

a) TXĐ: $D=\mathbb{R}$. Suy ra $\forall x\in D\Rightarrow -x\in D$

Ta có:

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=2\sin\left(\frac{-\pi}{2}\right)+3=1\ ;\ f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+3=5$$

Nhận thấy $\begin{cases} f\left(-\frac{\pi}{2}\right)\neq f\left(\frac{\pi}{2}\right)\\ f\left(-\frac{\pi}{2}\right)\neq -f\left(\frac{\pi}{2}\right)\end{cases}$

Do đó hàm số không chẵn không lẻ.

b) TXĐ: $D=\mathbb{R}$. Suy ra $\forall x\in D\Rightarrow -x\in D$

Ta có: $y=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

$$f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=0;\quad f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$$

Nhận thấy $\begin{cases} f\left(-\frac{\pi}{4}\right) \neq f\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ f\left(-\frac{\pi}{4}\right) \neq -f\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{cases}$

Do đó hàm số không chẵn không lẻ.

Ví dụ 4. Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số sau:

a) $\cos 2x + \cos 2y + 2\sin(x+y) = 2$; b) $y = \frac{\cos^3 x + 1}{\sin^3 x}$.

Giải

a) Hàm số xác định khi

$$\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \\ \sin x + \cot x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \\ \sin^2 x + \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

TXĐ: $y = \sin 2x + \cos\frac{x}{2}$ Suy ra $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$

Ta có: $f(-x) = \frac{\sin(-x) - \tan(-x)}{\sin(-x) + \cot(-x)} = \frac{-\sin x + \tan x}{-\sin x - \cot x} = \frac{\sin x - \tan x}{\sin x + \cot x} = f(x)$

Do đó hàm số đã cho là hàm số chẵn.

b) TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ Suy ra $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$

Ta có: $f(-x) = \frac{\cos^3(-x) + 1}{\sin^3(-x)} = \frac{\cos^3 x + 1}{-\sin^3 x} = -\frac{\cos^3 x + 1}{\sin^3 x} = -f(x)$

Do đó hàm số đã cho là hàm số lẻ.

Ví dụ 5. Xác định tham số m để hàm số sau: $y = f(x) = 3m\sin 4x + \cos 2x$ là hàm số chẵn.

Giải

TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Suy ra $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$

Ta có:

$f(-x) = 3m\sin(-4x) + \cos(-2x) = -3m\sin 4x + \cos 2x$

Để hàm số đã cho là hàm số chẵn thì:

$f(-x) = f(x), \forall x \in D \Leftrightarrow 3m\sin 4x + \cos 2x = -3m\sin 4x + \cos 2x, \forall x \in D$

$\Leftrightarrow 6m\sin 4x = 0 \Leftrightarrow m = 0$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BT 1. Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số sau:

a) $y = 4x^2 + \cos 5x$; b) $y = x^2 \sin x + \cot x$.

Giải

a) TXĐ: $D = \mathbb{R}$ Suy ra $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$

Ta có: $f(-x) = 4(-x)^2 + \cos(-5x) = 4x^2 + \cos 5x = f(x)$

Do đó hàm số đã cho là hàm số chẵn.

b) TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ Suy ra $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$

Ta có:

$f(-x) = (-x)^2 \sin(-x) + \cot(-x) = -x^2 \sin x - \cot x = -(x^2 \sin x + \cot x) = -f(x)$

Do đó hàm số đã cho là hàm số chẵn.

BT 2. Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số sau:

a) $y = \frac{1}{x-3} + 3\sin^2 x$; b) $y = \sin\sqrt{1-x}$.

Giải

a) TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

Ta có: $x = -3 \in D$ nhưng $-x = 3 \notin D$ nên D không có tính đối xứng.

Do đó, hàm số đã cho không chẵn không lẻ.

b) TXĐ: $D = [1; +\infty)$

Ta có: $x = 3 \in D$ nhưng $-x = -3 \notin D$ nên D không có tính đối xứng.

Do đó, hàm số đã cho không chẵn không lẻ.

BT 3. Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số sau: $y = \frac{\tan 3x + \cot 5x}{\sin 3x}$.

Giải

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$. Suy ra $\forall x\in D\Rightarrow -x\in D$

Ta có:

$$f\left(-x\right)=\frac{\tan\left(-3x\right)+\cot\left(-5x\right)}{\sin\left(-3x\right)}=\frac{\tan\left(3x\right)+\cot\left(5x\right)}{\sin\left(3x\right)}=f\left(x\right)$$

Vậy hàm số đã cho là hàm số chẵn.

BT 4. Tìm tham số a,b để hàm số: $y=f\left(x\right)=\begin{cases}\left(3a-1\right)\sin x+b\cos x, & \text{khi } x<0\\ a\sin x+\left(3-2b\right)\cos x, & \text{khi } x\geq 0\end{cases}$ là hàm số lẻ.

Giải

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$. Suy ra $\forall x\in D\Rightarrow -x\in D$

- TH 1: Với $x<0$ thì $f\left(x\right)=\left(3a-1\right)\sin x+b\cos x$

  Và $f\left(-x\right)=a\sin\left(-x\right)+\left(3-2b\right)\cos\left(-x\right)=-a\sin x+\left(3-2b\right)\cos x$

  Vì hàm số lẻ nên $f\left(-x\right)=-f\left(x\right)$ hay

  $$-a\sin x+\left(3-2b\right)\cos x=-\left(3a-1\right)\sin x-b\cos x,\forall x<0$$
  $$\Leftrightarrow\left(2a-1\right)\sin x+\left(3-b\right)\cos x=0,\forall x<0$$

  Đẳng thức trên đúng với mọi $x<0$ khi $\begin{cases}2a-1=0\\ 3-b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{2}\\ b=3\end{cases}$.

- TH 2: Với $x>0$ thì $f\left(x\right)=a\sin x+\left(3-2b\right)\cos x$

  Và $f\left(-x\right)=\left(3a-1\right)\sin\left(-x\right)+b\cos\left(-x\right)=-\left(3a-1\right)\sin x+b\cos x$

  Vì hàm số lẻ nên $f\left(-x\right)=-f\left(x\right)$ hay

  $$-\left(3a-1\right)\sin x+b\cos x=-a\sin x-\left(3-2b\right)\cos x$$

  Đẳng thức trên đúng với mọi $x>0$ khi $\begin{cases}2a-1=0\\ 3-b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{2}\\ b=3\end{cases}$.

  Vậy hàm số đã cho lẻ khi $a=\frac{1}{2},b=3$.

Dạng 3. Tìm giá trị lớn nhất và và giá trị nhỏ nhất của hàm số lượng giác

Phương pháp: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên tập D

- $M=\max\limits_{D} f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\le M, \forall x\in D \\ \exists x_0\in D: f(x_0)=M \end{cases}$
- $m=\min\limits_{D} f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\ge m, \forall x\in D \\ \exists x_0\in D: f(x_0)=m \end{cases}$

Lưu ý:

- $-1\le \sin x\le 1;\ \ -1\le \cos x\le 1.$
- $0\le \sin^2 x\le 1;\ \ 0\le \cos^2 x\le 1.$
- $0\le \sqrt{\sin x}\le 1;\ \ 0\le \sqrt{\cos x}\le 1.$
- Dùng điều kiện có nghiệm của phương trình cơ bản
  - Phương trình bậc hai: $ax^2+bx+c=0$ có nghiệm $x\in\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $\begin{cases}\Delta\ge 0\\ a\ne 0\end{cases}$
  - Phương trình $a\sin x+b\cos x=c$ có nghiệm $x\in\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $a^2+b^2\ge c^2$
  - Nếu hàm số có dạng: $y=\dfrac{a_1\sin x+b_1\cos x+c_1}{a_2\sin x+b_2\cos x+c_2}$

    Ta tìm miền xác định của hàm số rồi quy đồng mẫu số, đưa về phương trình $a\sin x+b\cos x=c$.

CÁC VÍ DỤ RÈN LUYỆN KĨ NĂNG

Ví dụ 1. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số:

a) $y=2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)+1$; b) $y=2\sqrt{\cos x+1}-3$.

Giải

a) Ta có:

$$-1\le \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\le 1\Rightarrow -2\le 2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\le 2\Rightarrow -1\le 2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+1\le 3$$

Hay $-1\le y\le 3$. Suy ra:

$\text{Max}\,y=3$ khi $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=1\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}.$

$\text{Min}\,y=-1$ khi $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=-1\Leftrightarrow x=-\dfrac{3\pi}{4}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}.$

b) Ta có:

$-1 \le \cos x \le 1 \Rightarrow 0 \le \cos x + 1 \le 2 \Rightarrow 0 \le \sqrt{\cos x + 1} \le \sqrt{2}$
$\Rightarrow 0 \le 2\sqrt{\cos x + 1} \le 2\sqrt{2} \Rightarrow -3 \le 2\sqrt{\cos x + 1} - 3 \le 2\sqrt{2} - 3$

Hay $-3 \le y \le 2\sqrt{2} - 3$ Suy ra

$\text{Max}y = 2\sqrt{2} - 3$ khi $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

$\text{Min}y = -3$ khi $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Ví dụ 2. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số:

a) $y = \sin x + \cos x$; b) $y = \sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x$.

Giải

a) Ta có: $y = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow -\sqrt{2} \le y \le \sqrt{2}$.

Suy ra:

$\text{Max}y = \sqrt{2}$ khi $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

$\text{Min}y = -\sqrt{2}$ khi $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

b) Ta có: $y = \sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\cos 2x\right) = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$

Suy ra: $-2 \le y \le 2$. Do đó:

$\text{Max}y = 2$ khi $\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = 1 \Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

$\text{Min}y = -2$ khi $\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = -1 \Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Ví dụ 3. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số:

a) $y = \cos^2 x + 2\sin x + 2$; b) $y = \sin^4 x - 2\cos^2 x + 1$.

Giải

a) Ta có:

$$y = \cos^2 x + 2\sin x + 2 = \left(1 - \sin^2 x\right)^2 + 2\sin x + 2$$
$$= -\sin^2 x + 2\sin x + 3 = -\left(\sin x - 1\right)^2 + 4$$

Vì $-1 \le \sin x \le 1 \Rightarrow -2 \le \sin x - 1 \le 0 \Rightarrow 4 \ge \left(\sin x - 1\right)^2 \ge 0$

$$\Rightarrow -4 \le -\left(\sin x - 1\right)^2 \le 0 \Rightarrow 0 \le -\left(\sin x - 1\right)^2 + 4 \le 4$$

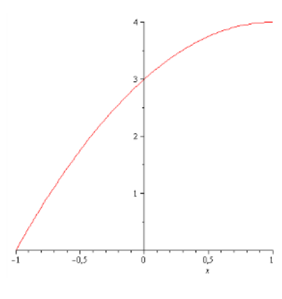
Hay $0 \le y \le 4$

Do đó:

$\text{Max}y = 4$ khi $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

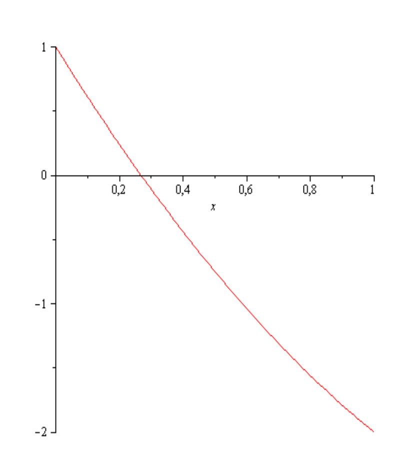
$\text{Min}y = 0$ khi $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Lưu ý:



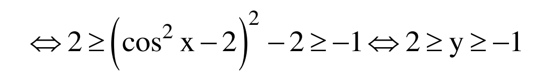
Nếu đặt $t = \sin x, t \in [-1;1]$. Ta có (P): $y = f(t) = -t^2 + 2t + 3$ xác định với mọi $t \in [-1;1]$, (P) có hoành độ đỉnh $t = 1$ và trên đoạn $[-1;1]$ hàm số đồng biến nên hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $t = -1$ hay $\sin x = -1$ và đạt giá trị lớn nhất khi $t = 1$ hay $\sin x = 1$.

b) Ta có



$$y = \sin^4 x - 2\cos^2 x + 1 = \left(1 - \cos^2 x\right)^2 - 2\cos^2 x + 1$$
$$= \cos^4 x - 4\cos^2 x + 2 = \left(\cos^2 x - 2\right)^2 - 2$$

Vì $0 \le \cos^2 x \le 1 \Leftrightarrow -2 \le \cos^2 x - 2 \le -1 \Leftrightarrow 4 \ge \left(\cos^2 x - 2\right)^2 \ge 1$

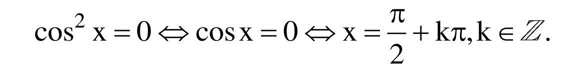


$$\Leftrightarrow 2 \ge \left(\cos^2 x - 2\right)^2 - 2 \ge -1 \Leftrightarrow 2 \ge y \ge -1$$



Do đó:

$\text{Max}y = 2$ khi



$$\cos^2 x = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$\text{Min}y = -1$ khi

$$\cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Lưu ý:

Nếu đặt $t=\cos^2 x, t\in[0;1]$. Ta có (P): $y=f(t)=t^2-4t+2$ xác định với mọi $t\in[0;1]$, (P) có hoành độ đỉnh $t=2\in[0;1]$ và trên đoạn $[0;1]$ hàm số nghịch biến nên hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $t=1$ và đạt giá trị lớn nhất khi $t=0$.

Ví dụ 4. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y=\dfrac{2\sin x-\cos x+1}{\sin x+\cos x-2}$

Giải

Ta có: $\sin x+\cos x-2=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)-2$

Vì $-\sqrt{2}\le\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\le\sqrt{2}, \forall x\in\mathbb{R}$ nên

$\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)-2\le\sqrt{2}-2<0, \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow \sin x+\cos x-2=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)-2\ne 0, \forall x\in\mathbb{R}$

Do đó: $D=\mathbb{R}$

Biến đổi $y=\dfrac{2\sin x-\cos x+1}{\sin x+\cos x-2}$

$\Leftrightarrow y\sin x+y\cos x-2y=2\sin x-\cos x+1$

$\Leftrightarrow (y-2)\sin x+(y+1)\cos x=2y+1 \quad (*)$

Điều kiện để phương trình (*) có nghiệm $x\in\mathbb{R}$ là $a^2+b^2\ge c^2$

$\Leftrightarrow (y-2)^2+(y+1)^2\ge(2y+1)^2 \Leftrightarrow 2y^2+6y-4\le 0 \Leftrightarrow \dfrac{-3-\sqrt{17}}{2}\le y\le\dfrac{-3+\sqrt{17}}{2}$

Kết luận: $\max\limits_{\mathbb{R}} y=\dfrac{-3+\sqrt{17}}{2}; \min\limits_{\mathbb{R}} y=\dfrac{-3-\sqrt{17}}{2}$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BT 1. Tìm GTLN, GTNN của hàm số $y=4\sin^2 x+\sqrt{2}\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Giải

TXĐ $D=\mathbb{R}$.

Ta có $y=4\sin^2 x+\sqrt{2}\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)=2(1-\cos 2x)+\sin 2x+\cos 2x$

$\Leftrightarrow y=2+\sin 2x-\cos 2x=2+\sqrt{2}\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)$

Với $-1\le\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)\le 1\Leftrightarrow 2-\sqrt{2}\le y\le 2+\sqrt{2}$

Vậy
$\max\limits_{\mathbb{R}} y=2+\sqrt{2}$ khi $\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)=1\Leftrightarrow 2x-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\Leftrightarrow x=\dfrac{3\pi}{8}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$

$\min\limits_{\mathbb{R}} y=2-\sqrt{2}$ khi $\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)=-1\Leftrightarrow 2x-\dfrac{\pi}{4}=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{8}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$

BT 2. a) Tìm giá trị lớn nhất và bé nhất của hàm số $y = \cos x(1 + 2\cos 2x)$

b) Tìm giá trị lớn nhất và bé nhất của hàm số $y = \sin^2 x.\cos x + \cos^2 x.\sin x$

Giải

a) Ta có: $y = \cos x + 2\cos x.\cos 2x = \cos x + \cos x + \cos 3x = 2\cos x + \cos 3x$

Hiển nhiên là $|y| \le 3$ và chú ý là $y = 3$ khi $x = 0$, $y = -3$ khi $x = \pi$.

Suy ra $y_{max} = 3$ khi $x = 0$; $y_{min} = -3$ khi $x = \pi$.

b) Ta có $y = \sin x.\cos x(\sin x + \cos x) = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x.\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

Đặt $t = x - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = t + \frac{\pi}{4} \Rightarrow 2x = 2t + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin 2x = \sin\left(2t + \frac{\pi}{2}\right) = \cos 2t$

Do đó: $y = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2t.\cos t = \frac{\sqrt{2}}{4}(\cos t + \cos 3t)$

$\Rightarrow y_{max} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ khi $t = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow y_{min} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ khi $t = \pi \Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{4}$

BT 3. Tìm miền giá trị của hàm số $y = \frac{2\cos 2x - 6\sin x.\cos x + 2}{\sin 2x - 2\cos^2 x - 3}$

Định hướng: Sử dụng công thức nhân đôi và hệ quả ($2\sin x.\cos x = \sin 2x$, $2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$) để biến đổi hàm số về dạng $y = R(\sin 2x, \cos 2x)$.

Giải

Ta có $\begin{cases} 6\sin x.\cos x = 3\sin 2x \\ 2\cos^2 x = 1 + \cos 2x \end{cases}$

Vậy $y = \frac{2\cos 2x - 3\sin 2x + 2}{\sin 2x - (1 + \cos 2x) - 3} = \frac{2\cos 2x - 3\sin 2x + 2}{\sin 2x - \cos 2x - 4}$

Ta có:

$\sin 2x - \cos 2x = \sqrt{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \sin 2x - \cos 2x - 4 \ne 0$

Do đó: $D = \mathbb{R}$

Biến đổi $y = \frac{2\cos 2x - 3\sin 2x + 2}{\sin 2x - \cos 2x - 4} \Leftrightarrow (y+3)\sin 2x - (y+2)\cos 2x = 4y + 2$

Điều kiện $a^2 + b^2 \ge c^2$

$\Leftrightarrow (y+3)^2 + (y+2)^2 \ge (4y+2)^2 \Leftrightarrow 14y^2 + 6y - 9 \le 0 \Leftrightarrow \frac{-3-\sqrt{15}}{14} \le y \le \frac{-3+\sqrt{15}}{14}$

Vậy $\max_{\mathbb{R}} y = \frac{-3+\sqrt{15}}{14}$; $\min_{\mathbb{R}} y = \frac{-3-\sqrt{15}}{14}$.

BT 4. Tìm GTLN, GTNN của hàm số : $y = f(x) = 2\sin^2 x + 3\sin x.\cos x + 5\cos^2 x$

Giải

Ta có:

$y=f(x)=2\sin^2 x+3\sin x.\cos x+5\cos^2 x=1-\cos 2x+\frac{3}{2}\sin 2x+\frac{5}{2}(1+\cos 2x)$

$\Leftrightarrow y=\frac{7}{2}+\frac{3}{2}(\sin 2x+\cos 2x)=\frac{7}{2}+\frac{3\sqrt{2}}{2}\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$

Ta có: $-1\le\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\le 1\Leftrightarrow -\frac{3\sqrt{2}}{2}\le\frac{3\sqrt{2}}{2}\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\le\frac{3\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow\frac{1}{2}(7-3\sqrt{2})\le\frac{7}{2}+\frac{3\sqrt{2}}{2}\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\le\frac{1}{2}(7+3\sqrt{2})$

Vậy $\text{Max}\, y=\frac{1}{2}(7+3\sqrt{2})$; $\text{Min}\, y=\frac{1}{2}(7-3\sqrt{2})$

BT 5. Tìm GTLN, GTNN của $y=\frac{\sin x+2\cos x+3}{2\sin x+\cos x+3}$

Giải

Vì $2\sin x+\cos x+3\neq 0$ (vì $\sin x, \cos x$ không thể đồng thời $=-1$)

Ta có $y=\frac{\sin x+2\cos x+3}{2\sin x+\cos x+3}=2y\sin x+y\cos x+3y=\sin x+2\cos x+3$

$\Leftrightarrow(2y-1)\sin x+(y-2)\cos x=3-3y$

Để phương trình có nghiệm ta có điều kiện: $(2y-1)^2+(y-2)^2\ge(3-3y)^2$

$\Leftrightarrow -4y^2+10y-4\ge 0\Leftrightarrow\frac{1}{2}\le y\le 2$

Suy ra $\min_{\mathbb{R}} y=\frac{1}{2}$, $\max_{\mathbb{R}} y=2$.

BT 6. Tìm gái trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số : $y=\frac{\cos^2 x+\sin x.\cos x}{1+\sin^2 x}$ (1)

Giải

Vì $1+\sin^2 x>0, \forall x$ nên:

$(1)\Leftrightarrow y(1+\sin^2 x)=\cos^2 x+\sin x.\cos x$

$\Leftrightarrow y\left(1+\frac{1-\cos 2x}{2}\right)=\frac{1+\cos 2x}{2}+\frac{1}{2}\sin 2x$

$\Leftrightarrow(y+1)\cos 2x+\sin 2x=3y-1$ (2)

Phương trình (2) có nghiệm:

$\Leftrightarrow(y+1)^2+1\ge(3y-1)^2\Leftrightarrow 8y^2-8y-1\le 0\Leftrightarrow\frac{2-\sqrt{6}}{4}\le y\le\frac{2+\sqrt{6}}{4}$

Vậy $\max_{\mathbb{R}} y=\frac{2+\sqrt{6}}{4}$; $\min_{\mathbb{R}} y=\frac{2-\sqrt{6}}{4}$.

BT 7. Tìm k để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\frac{k\sin x+1}{\cos x+2}$ nhỏ hơn -1.

Giải

Vì $\cos x+2\neq 0\ \forall x$. Do đó hàm số luôn luôn xác định.

Ta có: $y=\frac{k\sin x+1}{\cos x+2}\Leftrightarrow y\cos x+2y=k\sin x+1\Leftrightarrow k\sin x-y\cos x=2y-1$

Phương trình có nghiệm x với điều kiện:

$$k^2+y^2\ge(2y-1)^2=4y^2-4y+1$$

$$\Leftrightarrow 3y^2-4y+1-k^2\le 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2-\sqrt{1+3k^2}}{3}\le y\le\frac{2+\sqrt{1+3k^2}}{3}$$

Vì dấu "=" có thể xảy ra nên ta có $\text{Min}y=\frac{2-\sqrt{1+3k^2}}{3}$

Do đó: $\text{Min}y<-1\Leftrightarrow\frac{2-\sqrt{1+3k^3}}{3}<-1\Leftrightarrow k^2>8\Leftrightarrow|k|>2\sqrt{2}$

Vậy $k<-2\sqrt{2}$ hoặc $k>2\sqrt{2}$

Dạng 4. Chứng minh hàm số tuần hoàn và xác định chu kỳ của nó

Phương pháp

Muốn chứng minh hàm số tuần hoàn *f(x)* tuần hoàn ta thực hiện theo các bước sau:

- Xét hàm số $y=f(x)$, tập xác định là D
- Với mọi $x\in D$, ta có $x-T_0\in D$ và $x+T_0\in D$ (1). Chỉ ra $f(x+T_0)=f(x)$ (2)

Vậy hàm số $y=f(x)$ tuần hoàn

Chứng minh hàm tuần hoàn với chu kỳ T_0

Tiếp tục, ta đi chứng minh T_0 là chu kỳ của hàm số tức chứng minh T_0 là số dương nhỏ nhất thỏa (1) và (2). Giả sử có T sao cho $0<T<T_0$ thỏa mãn tính chất (2) $\Leftrightarrow\ldots\Rightarrow$ mâu thuẫn với giả thiết $0<T<T_0$. Mâu thuẫn này chứng tỏ T_0 là số dương nhỏ nhất thỏa (2). Vậy hàm số tuần hoàn với chu kỳ cơ sở T_0

Một số nhận xét:

- Hàm số $y=\sin x, y=\cos x$ tuần hoàn chu kỳ 2π. Từ đó $y=\sin(ax+b), y=\cos(ax+b)$ có chu kỳ $T_0=\frac{2\pi}{|a|}$
- Hàm số $y=\tan x,\ y=\cot x$ tuần hoàn chu kỳ π. Từ đó $y=\tan(ax+b), y=\cot(ax+b)$ có chu kỳ $T_0=\frac{\pi}{|a|}$

Chú ý:

$y=f_1(x)$ có chu kỳ T_1; $y=f_2(x)$ có chu kỳ T_2

Thì hàm số $y=f_1(x)\pm f_2(x)$ có chu kỳ T_0 là bội chung nhỏ nhất của T_1 và T_2.

Các dấu hiệu nhận biết hàm số không tuần hoàn

Hàm số $y = f(x)$ không tuần hoàn khi một trong các điều kiện sau vi phạm

- *Tập xác định của hàm số là tập hữu hạn*
- *Tồn tại số* a *sao cho hàm số không xác định với* $x > a$ *hoặc* $x < a$
- *Phương trình* $f(x) = k$ *có vô số nghiệm hữu hạn*
- *Phương trình* $f(x) = k$ *có vô số nghiệm sắp thứ tự* $\ldots < x_m < x_{m+1} < \ldots$ *mà* $\left|x_m - x_{m+1}\right| \to 0$ *hay* ∞

CÁC VÍ DỤ RÈN LUYỆN KĨ NĂNG

Ví dụ 1. Chứng minh rằng các hàm số sau là những hàm số tuần hoàn với chu kỳ cơ sở T_0

a) $f(x) = \sin x,\ T_0 = 2\pi;$ b) $f(x) = \tan 2x,\ T_0 = \dfrac{\pi}{2}$

Hướng dẫn giải

a) Ta có : $f(x + 2\pi) = f(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Giả sử có số thực dương $T < 2\pi$ thỏa $f(x+T) = f(x) \Leftrightarrow \sin\left(x + T\right) = \sin x\ ,\forall x \in \mathbb{R}\ \ (*)$

Cho $x = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow VT(*) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + T\right) = \cos T < 1;$ $VP(*) = \sin\dfrac{\pi}{2} = 1$

$\Rightarrow (*)$ không xảy ra với mọi $x \in \mathbb{R}$. Vậy hàm số đã cho tuần hoàn với chu kỳ $T_0 = 2\pi$

b) Ta có : $f(x + \dfrac{\pi}{2}) = f(x),\ \forall x \in D$.

Giả sử có số thực dương $T < \dfrac{\pi}{2}$ thỏa $f(x+T) = f(x) \Leftrightarrow \tan\left(2x + 2T\right) = \tan 2x\ ,\forall x \in D\ \ (**)$

Cho $x = 0 \Rightarrow VT(**) = \tan 2T \neq 0;$ $VP(**) = 0$

$B \Rightarrow (**)$ không xảy ra với mọi $x \in D$. Vậy hàm số đã cho tuần hoàn với chu kỳ $T_0 = \dfrac{\pi}{2}$

Ví dụ 2. Xét tính tuần hoàn và tìm chu kỳ cơ sở (nếu có) của các hàm số sau

a) $f(x) = \cos\dfrac{3x}{2}\cos\dfrac{x}{2};$ b) $y = \cos x + \cos(\sqrt{3}x);$ c) $f(x) = \sin\left(x^2\right);$ d) $y = \tan\sqrt{x}.$

Hướng dẫn giải

c) Hàm số $f(x) = \sin\left(x^2\right)$ không tuần hoàn vì khoảng cách giữa các nghiệm (không điểm) liên tiếp của nó dần tới 0

$$\sqrt{\left(k+1\right)\pi} - \sqrt{k\pi} = \frac{\pi}{\sqrt{\left(k+1\right)\pi} + \sqrt{k\pi}} \to 0 \text{ khi } k \to \infty$$

d) Hàm số $f(x) = \tan\sqrt{x}$ không tuần hoàn vì khoảng cách giữa các nghiệm (không điểm) liên tiếp của nó dần tới $+\infty$

$$\left(k+1\right)^2\pi^2 - k^2\pi \to \infty \text{ khi } k \to \infty$$

Dạng 5. Vẽ đồ thị hàm số lượng giác

Phương pháp

1/ Vẽ đồ thị hàm số lượng giác:

- Tìm tập xác định D.
- Tìm chu kỳ T_0 của hàm số.
- Xác định tính chẵn – lẻ (nếu cần).
- Lập bảng biến thiên trên một đoạn có độ dài bằng chu kỳ T_0 có thể chọn:

$x \in \left[0, T_0\right]$ hoặc $x \in \left[-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2}\right]$.

- Vẽ đồ thị trên đoạn có độ dài bằng chu kỳ.
- Rồi suy ra phần đồ thị còn lại bằng phép tịnh tiến theo véc tơ $\vec{v} = k.T_0.\vec{i}$ về bên trái và phải song song với trục hoành Ox (với $\vec{i}$ là véc tơ đơn vị trên trục Ox).

2/ Một số phép biến đổi đồ thị:

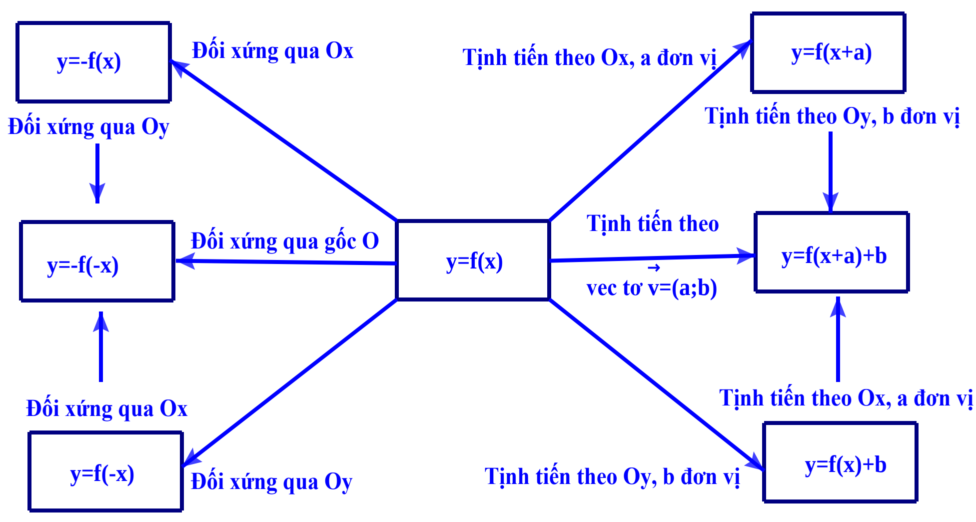
a) Từ đồ thị hàm số y = f(x), suy ra đồ thị hàm số y = f(x) + a bằng cách tịnh tiến đồ thị y = f(x) lên trên trục hoành a đơn vị nếu a > 0 và tịnh tiến xuống phía dưới trục hoành a đơn vị nếu a < 0.

b) Từ đồ thị hàm số y = f(x), suy ra đồ thị hàm số $y = f(x + a)$ bằng cách tịnh tiến đồ thị y = f(x) sang phải trục hoành a đơn vị nếu a > 0 và tịnh tiến sang trái trục hoành a đơn vị nếu a < 0.

c) Từ đồ thị y = f(x), suy ra đồ thị y = –f(x) bằng cách lấy đối xứng đồ thị y = f(x) qua trục hoành.

d) Đồ thị $y = |f(x)| = \begin{cases} f(x), \text{ nếu } f(x) \geq 0 \\ -f(x), \text{ nếu } f(x) < 0 \end{cases}$ ñöôïc suy töø ñoà thò y = f(x) baèng caùch giöõ nguyeân phaàn ñoà thò y = f(x) ôû phía treân truïc hoaønh vaø laáy ñoái xöùng phaàn ñoà thò y = f(x) naèm ôû phía döôùi truïc hoaønh qua truïc hoaønh.

Mối liên hệ đồ thị giữa các hàm số



MỘT SỐ VÍ DỤ RÈN LUYỆN KĨ NĂNG

Ví dụ 1. Vẽ đồ thị các hàm số sau: $y = \sin 4x$

Hướng dẫn giải

a) Hàm số $y = \sin 4x$.

Miền xác định: $D=\mathbb{R}$.

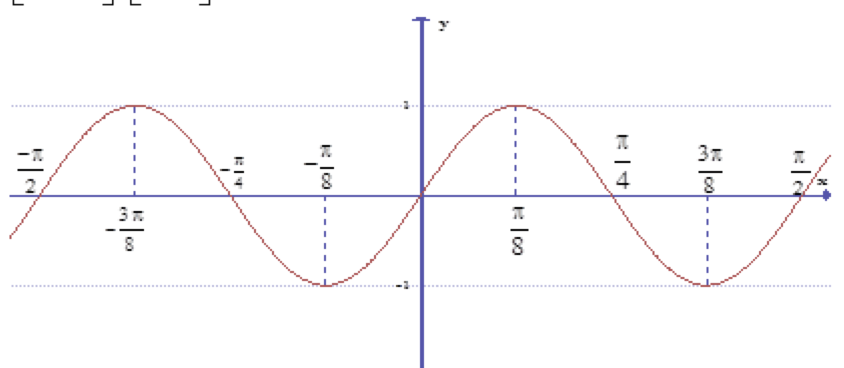
Ta chỉ cần vẽ đồ thị hàm số trên miền $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

(Do chu kì tuần hoàn $T=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$)

Bảng giá trị của hàm số $y=\sin 4x$ trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ là:

x	0	$\frac{\pi}{16}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{16}$	$\frac{5\pi}{24}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{16}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
y	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0

Ta có đồ thị của hàm số $y = \sin 4x$ trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ và sau đó tịnh tiến cho các đoạn: $\ldots,\left[-\frac{\pi}{2},0\right],\left[\frac{\pi}{2},\pi\right],\ldots$



Ví dụ 2: Vẽ đồ thị hàm số $y = \cos\frac{x}{3}$.

Hướng dẫn giải

Hàm số $y = \cos\frac{x}{3}$.

Miền xác định: $D=\mathbb{R}$.

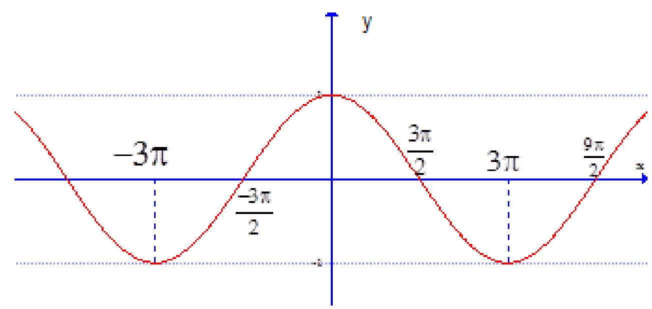
Ta chỉ cần vẽ đồ thị hàm số trên miền $[0;6\pi]$

(Do chu kì tuần hoàn $T=\frac{2\pi}{1/3}=6\pi$)

Bảng giá trị của hàm số $y = \cos\frac{x}{3}$ trên đoạn $[0;6\pi]$ là:

x	0	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{21\pi}{6}$	3π	$\frac{15\pi}{4}$	$\frac{9\pi}{2}$	$\frac{33\pi}{6}$	6π
y	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Ta có đồ thị của hàm số $y=\cos\frac{x}{3}$ trên đoạn $[0;6\pi]$ và sau đó tịnh tiến cho các đoạn: $...,[-6\pi,0],[6\pi,12\pi],....$

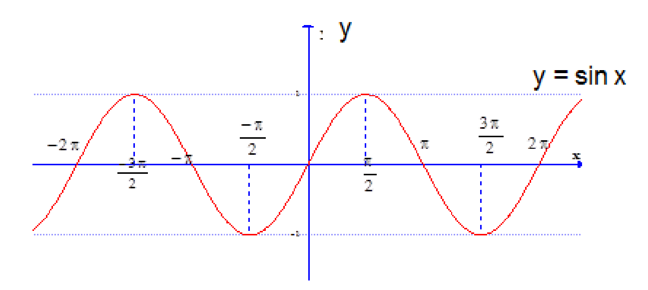


Ví dụ 3. Cho đồ thị của hàm số y =sinx, (C) . Hãy vẽ các đồ thị của các hàm số sau:

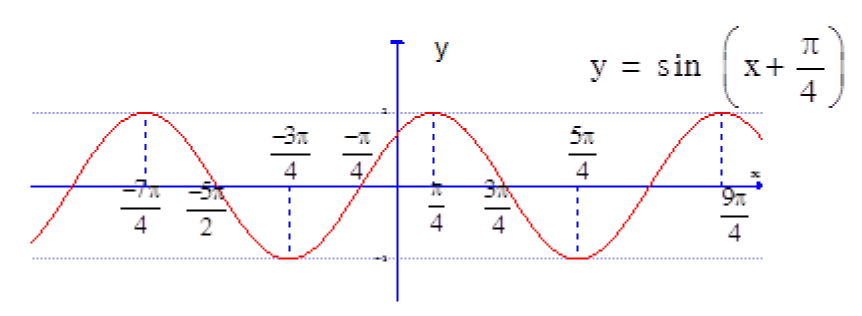
a) $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ b) $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+2.$

Hướng dẫn giải

Từ đồ thị của hàm số y = sinx, (C) như sau:

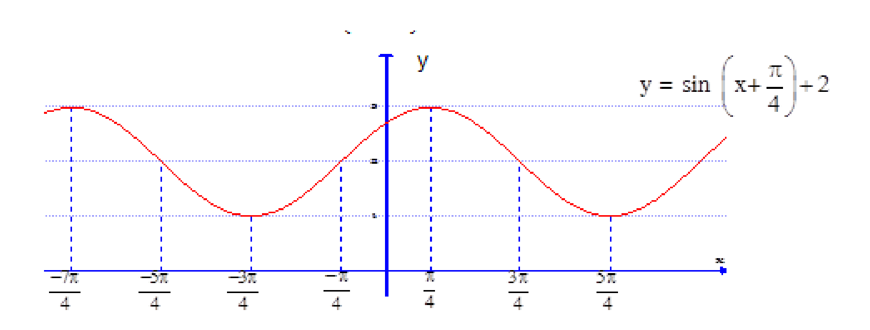


a) Từ đồ thị (C), ta có đồ thị $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ bằng cách tịnh tiến (C) sang trái một đoạn là $\frac{\pi}{4}$ đơn vị, ta được đồ thị hàm số $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$, (C') như (hình 8) sau:



b) Từ đồ thị (C′) của hàm số $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$, ta có đồ thị hàm số $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+2$ bằng cách tịnh tiến (C′) lên trên một đoạn là 2 đơn vị, ta được đồ thị hàm số $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+2$, (C") như sau:

y

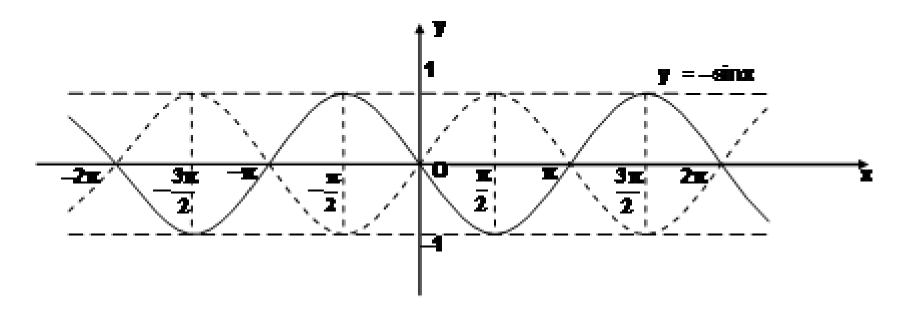


BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BT 1. Vẽ đồ thị $y = -\sin x$

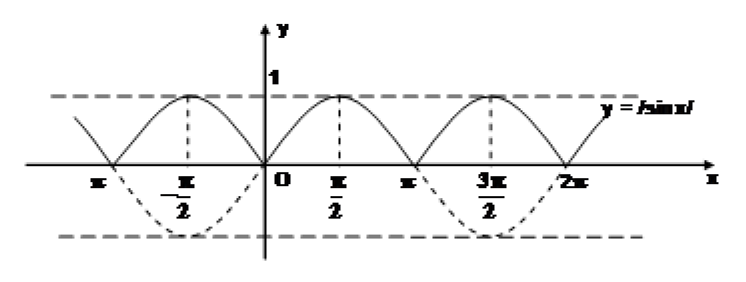
– Vẽ đồ thị $y = \sin x$.

– Từ đồ thị y = sinx, ta suy ra đồ thị y = –sinx bằng cách lấy đối xứng qua Ox.



BT 2. Vẽ đồ thị $y = |\sin x|$

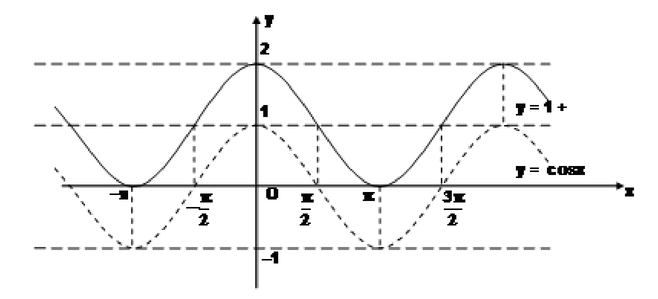
$$y = |\sin x| = \begin{cases} \sin x, & \text{nếu } \sin x \ge 0 \\ -\sin x, & \text{nếu } \sin x < 0. \end{cases}$$



BT 3. Vẽ đồ thị hàm số $y = 1 + \cos x$

– Vẽ đồ thị $y = \cos x$.

– Từ đồ thị $y = \cos x$, ta suy ra đồ thị $y = 1 + \cos x$ bằng cách tịnh tiến đồ thị $y = \cos x$ lên trục hoành 1 đơn vị.



C. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{1 + \cos x}$ là

A. $(-1;+\infty)$ **B.** $(-\infty;-1)$ **C.** $\mathbb{R}$ **D.** $\mathbb{R}\setminus\{2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

$-1\le \sin x\le 1\Rightarrow 0\le \cos x+1\le 2$.

Do đó hàm số $y=\sqrt{1+\cos x}$ luôn xác định với mọi x.

Câu 2. Tập xác định của hàm số $y=\tan\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ là

A. $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$ **B.** $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{6}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$

C. $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{12}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$ **D.** $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{12}+k\frac{\pi}{2} \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Điều kiện để hàm số $y=\tan\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ xác định là $\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\ne 0$

$\Leftrightarrow 2x+\frac{\pi}{3}\ne\frac{\pi}{2}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x\ne\frac{\pi}{12}+k\frac{\pi}{2} \mid k\in\mathbb{Z}$

Câu 3. Tập hợp $\mathbb{R}\setminus\{k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$ **không** phải là tập xác định của hàm số nào sau đây?

A. $y=\frac{1-\cos x}{\sin x}$ **B.** $y=\frac{1-\cos x}{2\sin x}$ **C.** $y=\frac{1+\cos x}{\sin 2x}$ **D.** $y=\frac{1+\cos x}{\sin x}$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Hàm số $y=\frac{1+\cos x}{\sin 2x}$ xác định khi $\sin 2x\ne 0$

$\Leftrightarrow 2x\ne k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow x\ne k\frac{\pi}{2} \mid k\in\mathbb{Z}$.

Tập xác định của hàm số $y=\frac{1+\cos x}{\sin 2x}$ là $\mathbb{R}\setminus\left\{k\frac{\pi}{2} \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Câu 4. Hàm số nào sau đây là hàm số chẵn?

A. $y=-2\cos x$ **B.** $y=-2\sin x$ **C.** $y=2\sin(-x)$ **D.** $y=\sin x-\cos x$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Tập xác định của hàm số $y=-2\cos x$ là $\mathbb{R}$.

Với mọi $x\in\mathbb{R}$, $y(-x)=-2\cos(-x)=-2\cos x=y(x)$.

Câu 5. Hàm số nào sau đây là hàm số lẻ?

A. $y=-2\cos x$ **B.** $y=-2\sin x$ **C.** $y=-2\sin x+2$ **D.** $y=-2\cos x+2$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Tập xác định của hàm số $y=-2\sin x$ là $\mathbb{R}$.

Với mọi $x\in\mathbb{R}$, $y(-x)=-2\sin(-x)=2\sin x=-y(x)$.

Câu 6. Nối mỗi dòng ở cột trái với một dòng ở cột phải để được khẳng định đúng:

A. $y=-2\sin x+2$ là hàm số

B. $y=\tan\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ là hàm số

C. $y=\sin x.\cos^2 x+\tan x$ là hàm số

I. chẵn

II. lẻ

III. không chẵn, không lẻ

Hướng dẫn giải

$A\leftrightarrow III$ vì:

Tập xác định của hàm số $y=-2\sin x+2$ là $\mathbb{R}$;

$\forall x\in\mathbb{R}$, $y(-x)=-2\sin(-x)+2=2\sin x+2;\ -y(x)=2\sin x-2$.

Vậy hàm số $y=-2\sin x+2$ không phải là hàm số chẵn và không phải là hàm số lẻ.

$B\leftrightarrow III$ vì:

Tập xác định của hàm số $y=\tan\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ là $\mathbb{Z}\setminus\left\{\frac{5\pi}{6}+k\pi\,|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$;

$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{5\pi}{6}+k\pi\,|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$, ta có:

$y(-x)=\tan\left(-x-\frac{\pi}{3}\right)=-\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\neq -y(x)$ và $y(-x)=\tan\left(-x-\frac{\pi}{3}\right)=-\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\neq y(x)$

Vậy hàm số $y=\tan\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ không phải là hàm số chẵn và không phải là hàm số lẻ.

$C\leftrightarrow II$ vì:

Tập xác định của hàm số $y=\sin x.\cos^2 x+\tan x$ là $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\,|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$;

$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\,|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$, ta có: $y(-x)=\sin(-x)\cos^2(-x)+\tan(-x)=-\sin x\cos^2 x-\tan x=-y(x)$.

Vậy hàm số $y=\sin x.\cos^2 x+\tan x$ là hàm số lẻ.

Câu 7. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y=4\cos\sqrt{x}$ là

A. 0 và 4 **B.** -4 và 4 **C.** 0 và 1 **D.** -1 và 1

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Với mọi $x\geq 0$, $-1\leq\cos\sqrt{x}\leq 1\Rightarrow -4\leq 4\cos\sqrt{x}\leq 4$.

Câu 8. Giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của hàm số $y=\sqrt{1-\cos x^2}-1$ là

A. 0 và $\sqrt{2}-1$ **B.** -1 và $\sqrt{2}-1$ **C.** -2 và 0 **D.** -1 và 1

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

$-1\le \cos x^2\le 1\Rightarrow 0\le 1-\cos x^2\le 2\Rightarrow 0\le \sqrt{1-\cos x^2}\le \sqrt{2}\Rightarrow -1\le \sqrt{1-\cos x^2}-1\le \sqrt{2}-1$.

Câu 9. Cho hàm số $f(x)=\sin x$. Hàm số $f(x)$ đồng biến trong khoảng

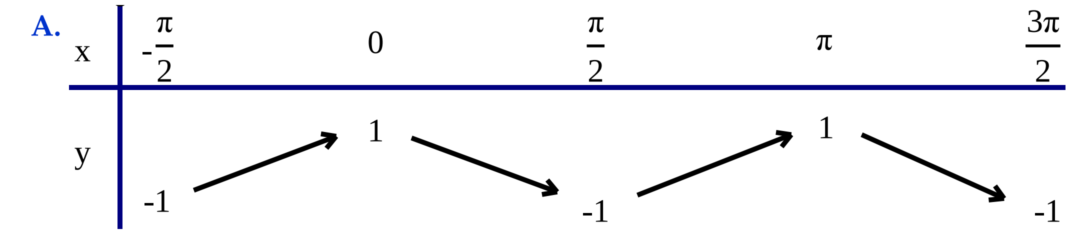
A. $\left(\pi;\frac{3\pi}{2}\right)$ **B.** $\left(-\pi;\frac{\pi}{2}\right)$ **C.** $\left(\frac{3\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right)$ **D.** $\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)$

Hướng dẫn giải

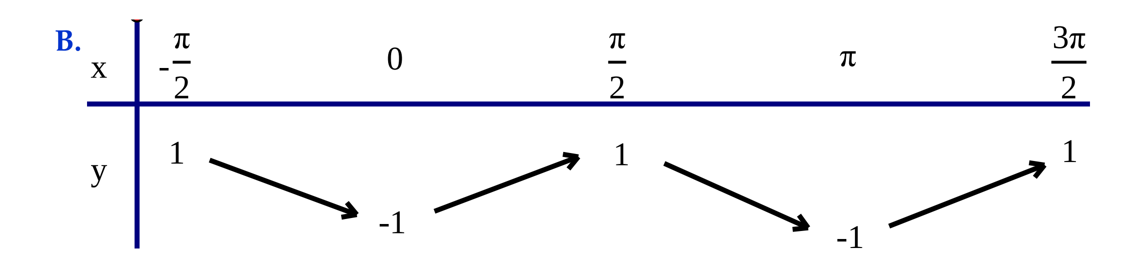
ĐÁP ÁN C.

Câu 10. Bảng biến thiên của hàm số $y=\cos 2x$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$ là

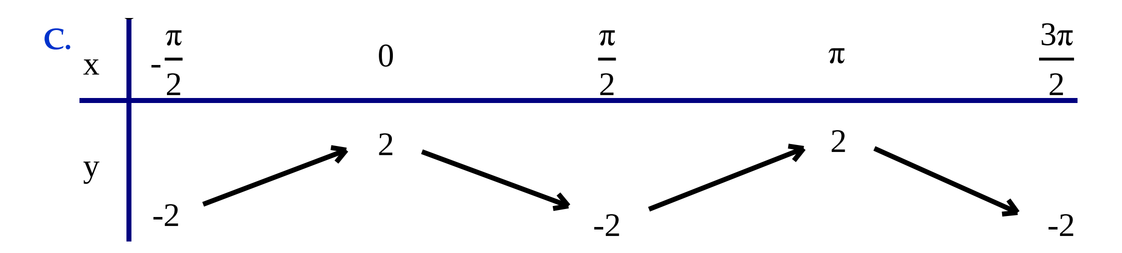
A.



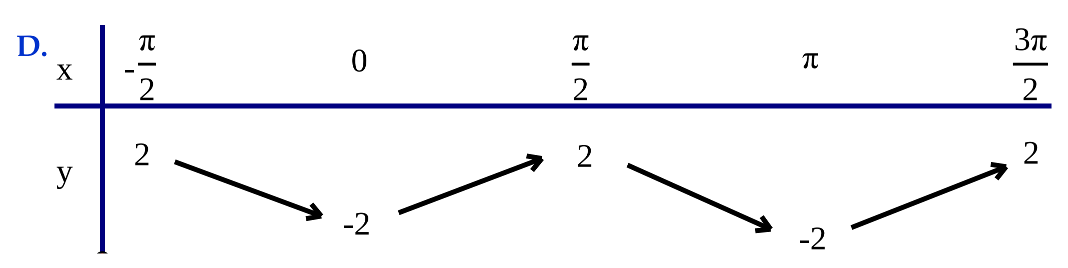
B.



C.



D.

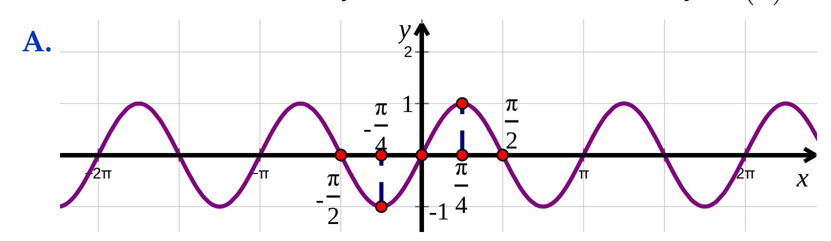


Hướng dẫn giải

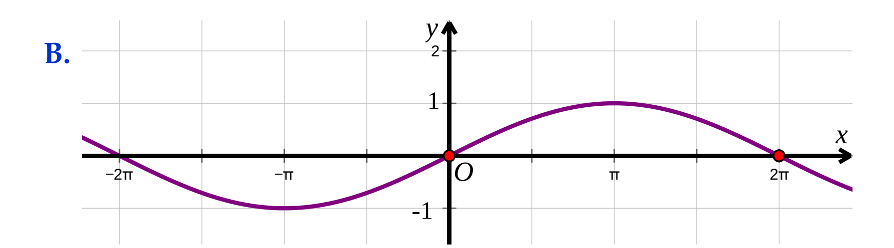
ĐÁP ÁN A.

Câu 11. Hình nào sau đây biểu diễn đồ thị hàm số $y = f(x) = 2\sin 2x$?

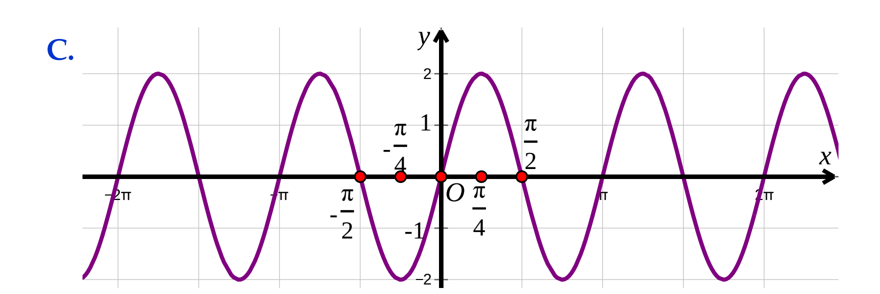
A.



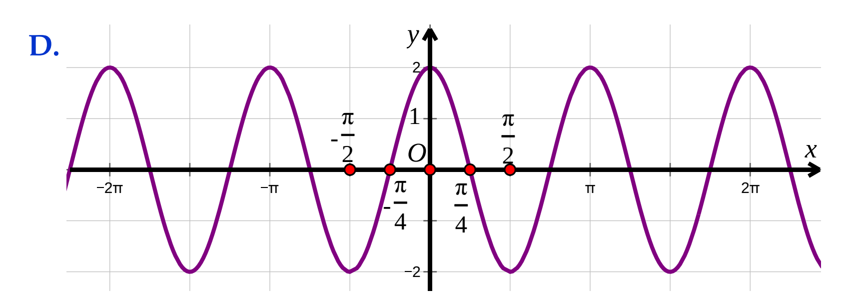
B.



C.



D.

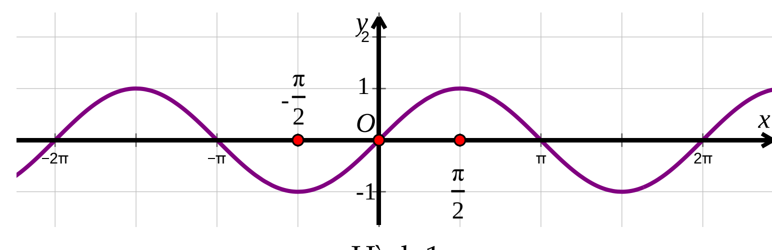


Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Do $-1 \le \sin 2x \le 1$ nên $-2 \le 2\sin 2x \le 2$.

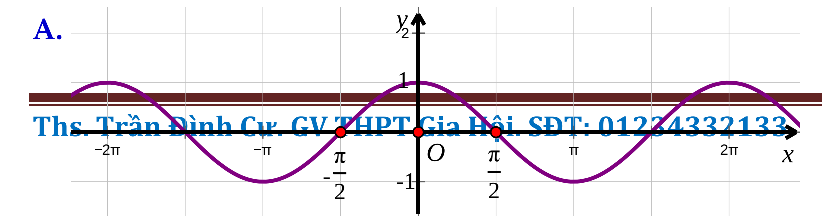
Câu 12. Cho đồ thị hàm số $y = \sin x$ như hình 1.



Hình 1

Hình nào sau đây là đồ thị hàm số $y = \sin|x|$?

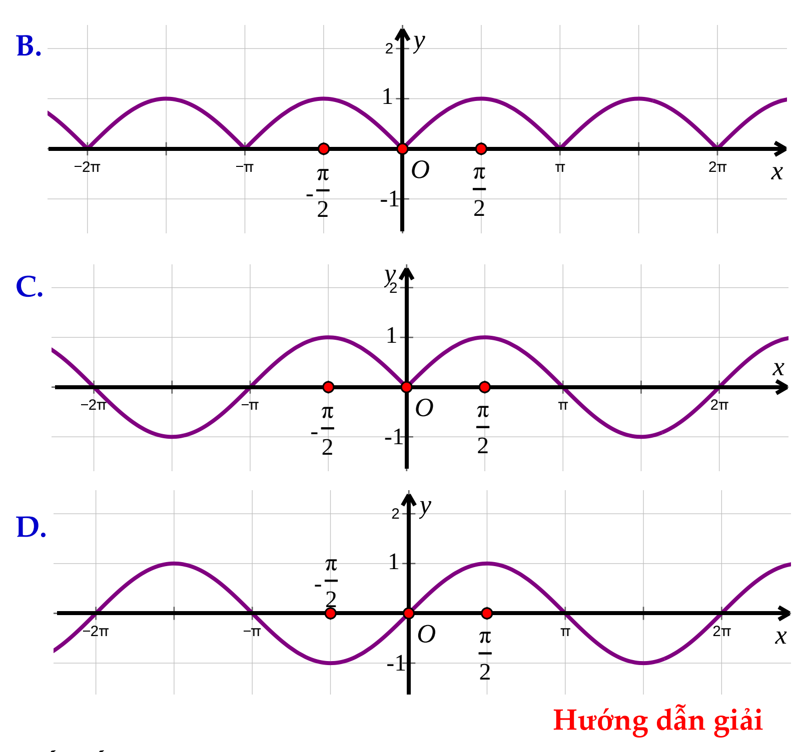
A.



B.

C.

D.



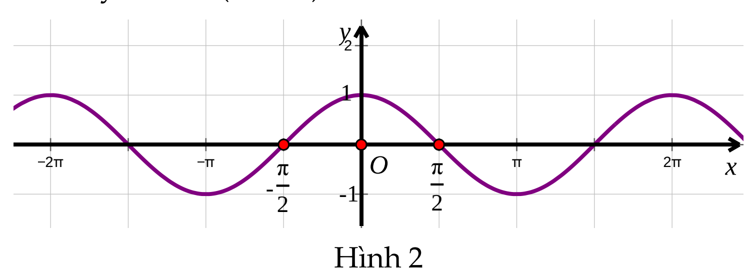
Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Với $x \ge 0$ thì $\sin|x| = \sin x \Rightarrow$ phần đồ thị phía bên phải của hàm số $y = \sin|x|$ giống hệt phần đồ thị bên phải của hàm số $y = \sin x$.

Với $x < 0$ thì $\sin|x| = \sin(-x) = -\sin x \Rightarrow$ phần đồ thị phía bên trái của hàm số $y = \sin|x|$ là phần đối xứng qua trục hoành của phần đồ thị bên trái của hàm số $y = \sin x$.

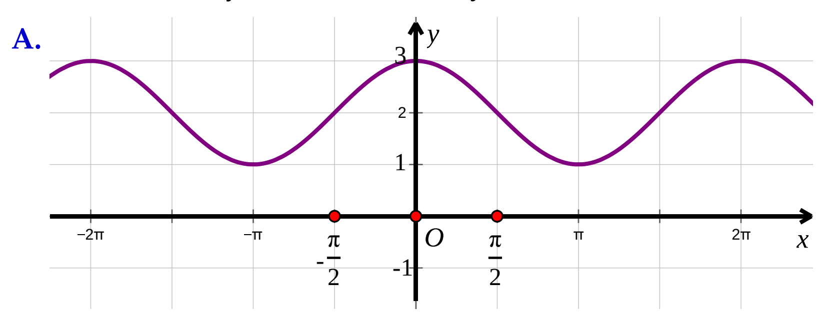
Câu 13. Cho đồ thị hàm số $y = \cos x$ (hình 2).

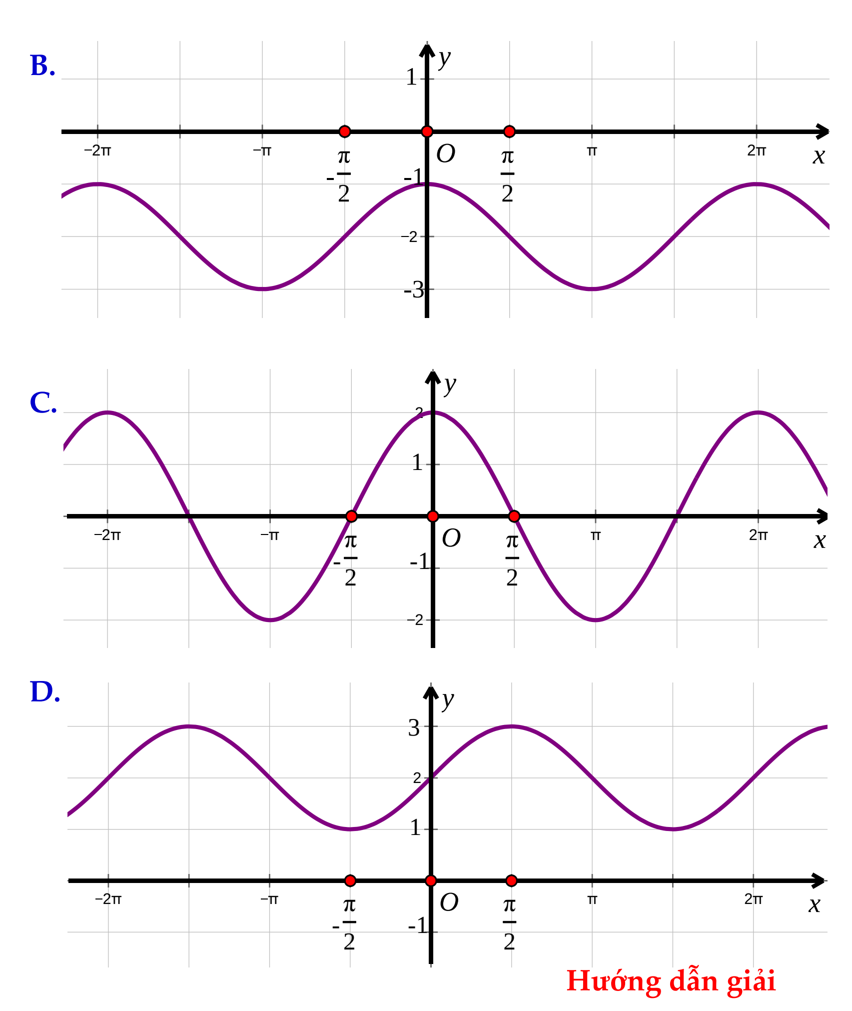


Hình 2

Hình nào sau đây là đồ thị hàm số $y = \cos x + 2$?

A.



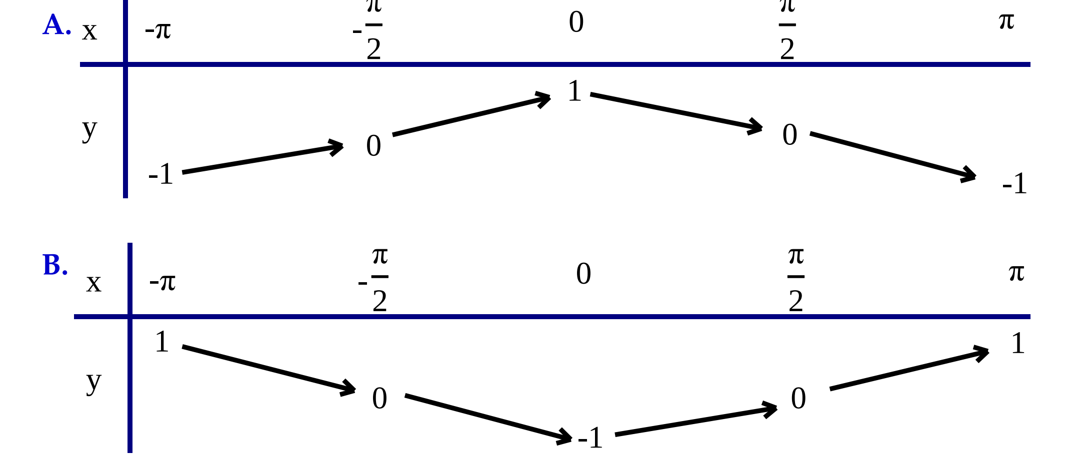


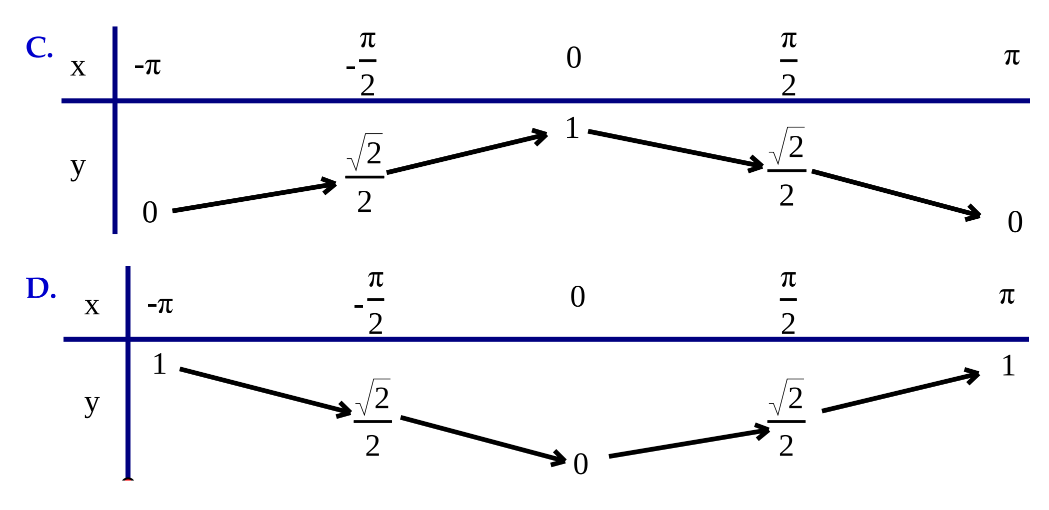
Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Tịnh tiến đồ thị hàm số $y = \cos x$ dọc theo trục tung lên phía trên 2 đơn vị thì được đồ thị hàm số $y = \cos x$.

Câu 14. Cho hàm số $y = \cos\frac{x}{2}$. Bảng biến thiên của hàm số trên đoạn $[-\pi;\pi]$ là



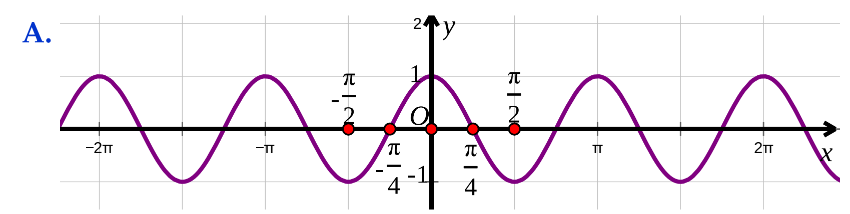


Hướng dẫn giải

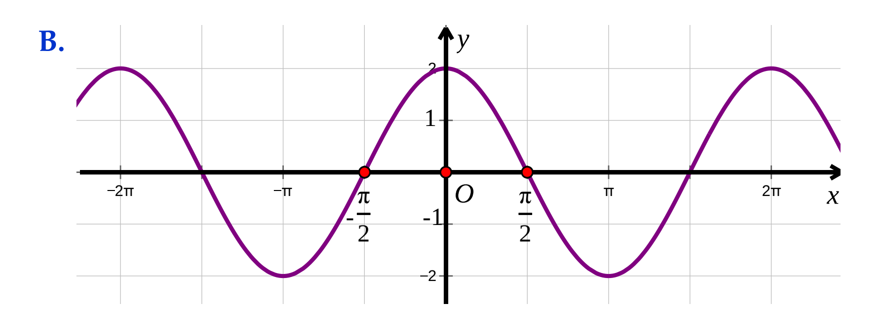
ĐÁP ÁN C.

Câu 15. Hình vẽ nào sau đây biểu diễn đồ thị hàm số $y=\cos\frac{x}{2}$?

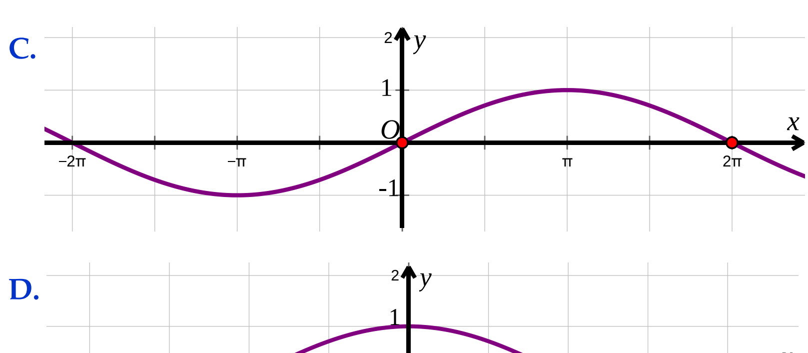
A.



B.



C.



D.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Câu 16. Cho hàm số $y=f\left(x\right)=\tan^{2}+1$. Hàm số này có chu kì là

A. $\frac{\pi}{2}$ **B.** π **C.** 2π **D.** 4π

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Với mọi $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$, ta có: $f(x+k\pi) = \tan^2(x+k\pi) + 1 = \tan^2 x + 1 = f(x)$

$\Rightarrow T = \pi$ là số dương nhỏ nhất thỏa mãn $f(x+T) = f(x)$

$\Rightarrow$ Chu kì của hàm số $y = \tan^2 x + 1$ là π.

Câu 17. Cho hàm số $y = f(x) = \cos\frac{x}{2}$. Hàm số này có chu kỳ là

A. $\frac{\pi}{2}$ **B.** π **C.** 2π **D.** 4π

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

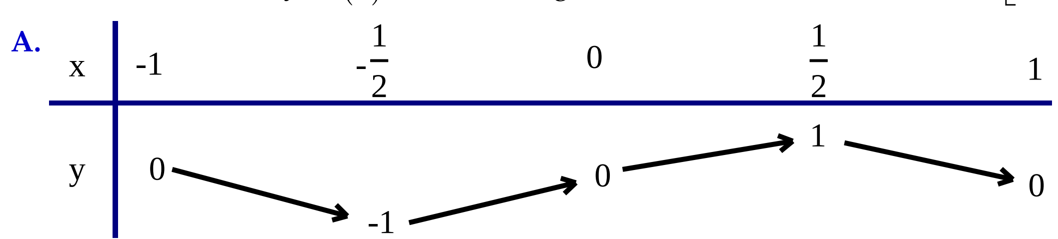
Với mọi $x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z}$, ta có: $f(x+4k\pi) = \cos\left(\frac{x+4k\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{x}{2} + 2k\pi\right) = \cos\frac{x}{2} = f(x)$

$\Rightarrow T = 4\pi$ là số dương nhỏ nhất thỏa mãn $f(x+T) = f(x)$

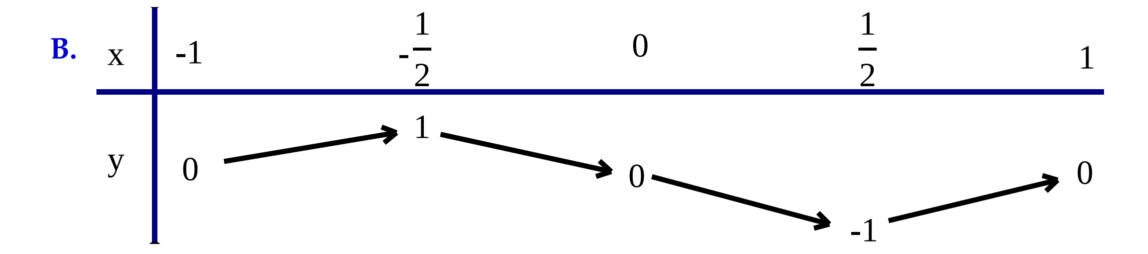
$\Rightarrow$ Chu kì của hàm số $y = f(x) = \cos\frac{x}{2}$ là 4π.

Câu 18. Cho hàm số $y = f(x) = \sin \pi x$. Bảng biến thiên của hàm số trên đoạn $[-1;1]$ là

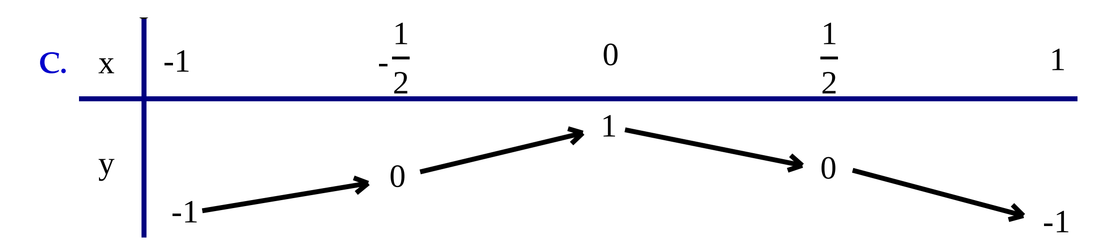
A.



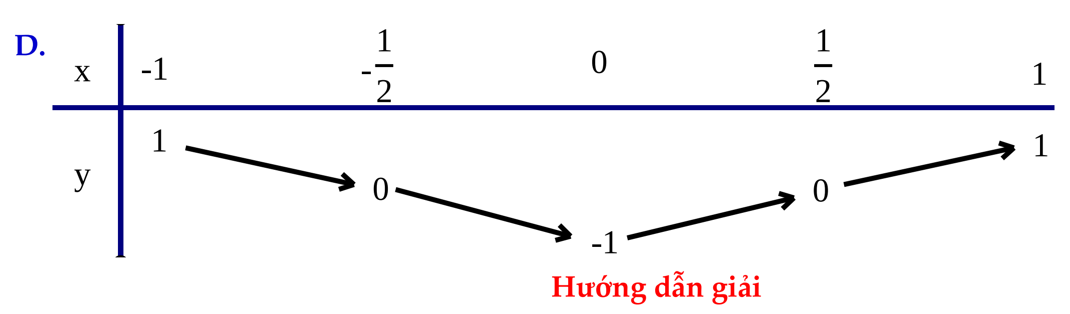
B.



C.



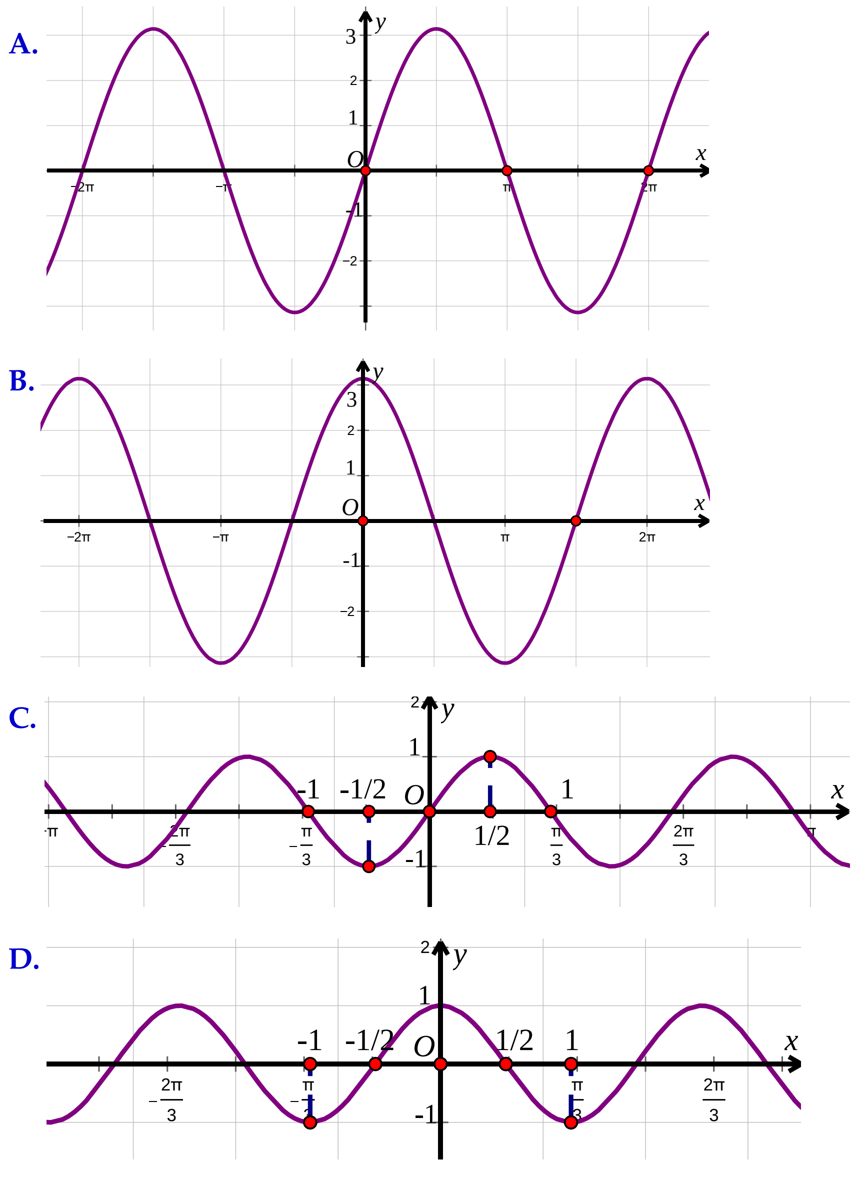
D.



Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Câu 19. Hình nào sau đây biểu diễn đồ thị của hàm số $y = f(x) = \sin \pi x$?



Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Câu 20. Tập xác định của hàm số $y = \dfrac{4\sin x - 5}{2\cos x}$ là:

A. $D=\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$

B. $D=\mathbb{R}\backslash\{0\}$

C. $D=\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+k2\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$

D. $D=\mathbb{R}\backslash\{\pi+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Hàm số xác định khi $\cos x\neq 0\Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Vậy tập xác định của hàm số là: $D=\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Câu 21. Tập xác định của hàm số $y=\frac{3\tan x-5}{1-\sin^2 x}$ là:

A. $D=\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+k2\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$

B. $D=\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$

C. $D=\mathbb{R}\backslash\{\pi+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$

D. $D=\mathbb{R}$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Điều kiện cần và đủ để hàm số xác định là: $\begin{cases}\cos x\neq 0\\ \sin^2 x\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow\sin^2 x\neq 1\Leftrightarrow\sin x\neq\pm 1\Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Vậy tập xác định là: $D=\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Câu 22. Tập xác định của hàm số $y=\frac{3+4\cot 2x}{\cos 2x-1}$ là:

A. $D=\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$

B. $D=\mathbb{R}$

C. $D=\mathbb{R}\backslash\{k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$

D. $D=\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{k\pi}{2} \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Điều kiện cần và đủ để hàm số xác định là:

$\begin{cases}\cos 2x\neq 1\\ \sin 2x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos 2x\neq 1\\ \cos 2x\neq\pm 1\end{cases}\Leftrightarrow\cos 2x\neq\pm 1\Leftrightarrow 2x\neq k\pi\Leftrightarrow x\neq\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$.

Vậy tập xác định là: $D=\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Câu 23. Tập xác định của hàm số $y=\cot\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+\sin 2x$ là:

A. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{4}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$

B. $D=\varnothing$

C. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2} \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$

D. $D=\mathbb{R}$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Điều kiện để hàm số xác định: $\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\neq 0\Leftrightarrow 2x-\frac{\pi}{4}\neq k\pi\Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$.

Vậy tập xác định của hàm số là: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Câu 24. Tập xác định của hàm số $y=\sqrt{\frac{2\cos x-5}{3\sin x-4}}$ là:

A. $D=\left\{\frac{\pi}{4}+k2\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$

B. $D=\varnothing$

C. $D=\mathbb{R}$

D. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Ta luôn có: $2\cos x-5<0\ \forall x\in\mathbb{R}$ (vì $|\cos x|\leq 1\ \forall x\in\mathbb{R}$)

$3\sin x-4<0\ \forall x\in\mathbb{R}$ (vì $|\sin x|\leq 1\ \forall x\in\mathbb{R}$)

Do đó: $\frac{2\cos x-5}{3\sin x-4}>0, \forall x\in\mathbb{R}$.

Vậy tập xác định là: $D=\mathbb{R}$.

Câu 25. Cho $f(x)=\frac{\cos 2x}{1+\sin^2 3x}, g(x)=\frac{|\sin 2x|-\cos 3x}{2+\tan^2 x}$

A. $f(x)$ và $g(x)$ lẻ

B. $f(x)$ và $g(x)$ chẵn

C. $f(x)$ chẵn, $g(x)$ lẻ

D. $f(x)$ lẻ, $g(x)$ chẵn

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

- $f(x)=\frac{\cos 2x}{1+\sin^2 3x}$

Vì $1+\sin^2 3x>0\ \forall x\in\mathbb{R}$ nên tập xác định của $f(x)$ là: $D=\mathbb{R}$, đây là tập đối xứng.

Ta có: $\forall x\in D: f(-x)=\frac{\cos(-2x)}{1+\sin^2(-3x)}=\frac{\cos 2x}{1+\sin^2 3x}=f(x)$

Vậy $f(x)$ là hàm số chẵn.

- $g(x)=\dfrac{|\sin x|-\cos 3x}{2+\tan^2 x}$

Điều kiện cần và đủ là $\cos x\neq 0\Leftrightarrow x\neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$. Do đó tập xác định của $f(x)$ là: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$, đây là tập đối xứng.

$\forall x\in D$, ta có: $g(-x)=\dfrac{|\sin(-x)|-\cos(-3x)}{2+\tan^2(-x)}=\dfrac{|-\sin x|-\cos 3x}{2+\tan^2 x}=\dfrac{|\sin x|-\cos 3x}{2+\tan^2 x}=g(x)$

Vậy $g(x)$ là hàm số chẵn.

Câu 26. Tìm hàm số lẻ trong các hàm số sau:

A. $f(x)=\sin 5x.\sin 6x$

B. $g(x)=\dfrac{|\sin x|}{3+\cot^2 x}$

C. $h(x)=2\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)+\sin(\pi-2x)$

D. $k(x)=\dfrac{\cot^4 x}{2+\tan^2 x}$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

- $f(x)=\sin 5x.\sin 6x$

Tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}$.

$\forall x\in D$ ta có: $f(-x)=\sin(-5x)\sin(-6x)=(-\sin 5x)(-\sin 6x)=\sin 5x\sin 6x=f(x)$

$\Rightarrow f(x)$ là hàm số chẵn.

- $g(x)=\dfrac{|\sin x|}{3+\cot^2 x}$

Hàm số xác định $\Leftrightarrow \sin x\neq 0\Leftrightarrow x\neq k\pi, k\in\mathbb{Z}$ do đó tập xác định là $D=\mathbb{R}\setminus\{k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$: tập đối xứng.

$\forall x\in D$ ta có: $g(-x)=\dfrac{|\sin(-x)|}{3+\cot^2(-x)}=\dfrac{|-\sin x|}{3+\cot^2 x}=\dfrac{|\sin x|}{3+\cot^2 x}=g(x)$

$\Rightarrow g(x)$ là hàm số chẵn.

- $h(x)=2\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)+\sin(\pi-2x)=-2\sin x+\sin 2x$

Tập xác định $D=\mathbb{R}$: tập đối xứng.

$\forall x\in D$, ta có: $h(-x)=-2\sin(-x)+\sin(-2x)=2\sin x-\sin 2x=-(-2\sin x+\sin 2x)=-h(x)$

$\Rightarrow h(x)$ là hàm số lẻ.

- $k(x)=\dfrac{\cot^4 x}{2+\tan^2 x}$

Hàm số xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq \ell\pi \end{cases}, k, \ell \in \mathbb{Z}$

Do đó tập xác định là: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{m\pi}{2}, m \in \mathbb{Z} \right\}$

$\forall x \in D,\ k(-x) = \dfrac{\cot^4(-x)}{2 + \tan^2(-x)} = \dfrac{\cot^4 x}{2 + \tan^2 x} = k(x)$

$\Rightarrow k(x)$ là hàm số chẵn.

Câu 27. Cho 4 hàm số: $f(x) = \cos 2x + \sin 5x$, $g(x) = \sin x - \sin^2 x$, $h(x) = \cos(x-2)$, $k(x) = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$. Bốn hàm có:

A. 2 hàm số lẻ

B. 2 hàm số chẵn

C. 3 hàm số lẻ

D. 4 hàm không chẵn, không lẻ

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

- $f(x) = \cos 2x + \sin 5x$

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$: tập đối xứng.

Ta có: $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \cos \pi + \sin \dfrac{5\pi}{2} = -1 + 1 = 0$

$f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = \cos(-\pi) + \sin\left(-\dfrac{5\pi}{2}\right) = -1 - 1 = -2$

$\Rightarrow f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) \neq \pm f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) \Rightarrow f(x)$ không chẵn, không lẻ.

- $g(x) = \sin x - \sin^2 x$

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$, tập đối xứng.

Ta có: $g\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \sin \dfrac{\pi}{6} - \sin^2 \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{4}$

$g\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = \sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) - \sin^2\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4} = -\dfrac{3}{4}$

$\Rightarrow g\left(\dfrac{\pi}{6}\right) \neq \pm g\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) \Rightarrow$ hàm số không chẵn, không lẻ.

- $h(x) = \cos(x-2)$

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $h(2) = \cos(2-2) = \cos 0 = 1$

$h(-2) = \cos(-2-2) = \cos 4$

$\Rightarrow h(2) \neq \pm h(-2) \Rightarrow$ hàm số không chẵn, không lẻ.

- $k(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$k\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0 \neq k\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos 0 = 1$

$\Rightarrow k(x)$ là hàm số không chẵn, không lẻ.

Câu 28. Chu kì của hàm số $y = \sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right)$ là:

A. $T = \frac{2\pi}{5}$ **B.** $T = \frac{5\pi}{2}$ **C.** $T = \frac{\pi}{2}$ **D.** $T = \frac{\pi}{8}$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Cần nhớ: Hai hàm số $y = \sin(ax + b)$ và $y = \cos(ax + b)$ có chu kì là $T = \frac{2\pi}{|a|}, a \neq 0$.

Câu 29. Hàm số $y = \sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{3}$ tuần hoàn, có chu kì là:

A. $T = 3\pi$ **B.** $T = 6\pi$ **C.** $T = 9\pi$ **D.** $T = 12\pi$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Cần nhớ: Nếu hàm số y_1 có chu kì là T_1, y_2 có chu kì là T_2 thì $y_1 \pm y_2$ có chu kì là $T = BCNN(T_1; T_2)$.

$y = \sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{3}$

$y_1 = \sin\frac{x}{2}$ có chu kì là $T_1 = 4\pi$.

$y_2 = \cos\frac{x}{3}$ có chu kì là $T_2 = 6\pi$.

Chu kì của y là $T = BCNN(4\pi, 6\pi) = 12\pi$.

Câu 30. Tìm kết luận **sai?**

A. Hàm số $y = \cos(2x + 3)$ có chu kì $T = \pi$ **B.** Hàm số $y = \sqrt{\sin x}$ có chu kì $T = 2\pi$

C. Hàm số $y = \tan\sqrt{x}$ có chu kì $T = \pi$ **D.** Hàm số $y = \cos^2\frac{3\pi x}{2}$ có chu kì $T = \frac{2}{3}$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Xét hàm số $f(x) = \tan\sqrt{x}$ ta có:

$f(0) = \tan\sqrt{0} = \tan 0 = 0$

$f(0+\pi)=\tan\sqrt{0+\pi}=\tan\sqrt{\pi}\approx 0,03$

Suy ra $f(0)\neq f(0+\pi)$

Do đó $T=\pi$ không là chu kì của hàm số $f(x)=\tan\sqrt{x}$.

Câu 31. Tìm kết luận **sai?**

A. Hàm số $y=x^5+\sin 3x$ là hàm số lẻ

B. Hàm số $y=x^3.\cos 2x$ là hàm số chẵn

C. Hàm số $y=\sin x-\cos x$ không chẵn, không lẻ

D. Hàm số $y=\cos(x+2)+\cos(x-2)$ là hàm số chẵn

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

- $f(x)=x^5+\sin 3x$

$\Rightarrow f(-x)=(-x)^5+\sin(-3x)=-x^5-\sin 3x=-(x^5+\sin 3x)=-f(x)$

Vậy $f(x)=x^5+\sin 3x$ là hàm số lẻ.

- $f(x)=x^3.\cos 2x$

$\Rightarrow f(-x)=(-x)^3.\cos(-2x)=-x^3.\cos 2x=-f(x)$

$\Rightarrow f(x)=x^3.\cos 2x$ là hàm số lẻ.

Vì đề thi trắc nghiệm $\Rightarrow$ (C) và (D) đều có kết luận đúng (Các em tự kiểm chứng).

Câu 32. Tìm kết luận **sai?**

A. Hàm số $y=x.\sin^3 x$ là hàm số chẵn

B. Hàm số $y=\dfrac{\sin x.\cos x}{\tan x+\cot x}$ là hàm số lẻ

C. Hàm số $y=\dfrac{\sin x-\tan x}{\sin x+\cot x}$ là hàm chẵn

D. Hàm số $y=\cos x^3+\sin x^3$ không chẵn, không lẻ

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

- $f(x)=x.\sin^3 x\Rightarrow f(-x)=(-x).\sin^3(-x)=x\sin^3 x=f(x)$

$\Rightarrow f(x)=x\sin^3 x$ là hàm số chẵn.

- $f(x)=\dfrac{\sin x\cos x}{\tan x+\cot x}$

$$f(-x)=\frac{\sin(-x)\cos(-x)}{\tan(-x)+\cot(-x)}=\frac{-\sin x\cos x}{-\tan x-\cot x}=\frac{\sin x\cos x}{\tan x+\cot x}=f(x)$$

$\Rightarrow f(x)=\dfrac{\sin x\cos x}{\tan x+\cot x}$ là hàm số chẵn.

Câu 33. Hàm số $y=\cos^2\dfrac{x}{8}$ có chu kỳ là:

A. 2π **B.** 4π **C.** 8π **D.** 16π

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Ta có: $y=\cos^2\dfrac{x}{8}=\dfrac{1}{2}\left(1+\cos\dfrac{x}{4}\right)$ hàm số này có chu kỳ là $T=\dfrac{2\pi}{\frac{1}{4}}=8\pi$.

Câu 34. Hàm số $y=\tan 3\pi x$ có chu kỳ là:

A. $\dfrac{\pi}{3}$ **B.** $\dfrac{4}{3}$ **C.** $\dfrac{2\pi}{3}$ **D.** $\dfrac{1}{3}$

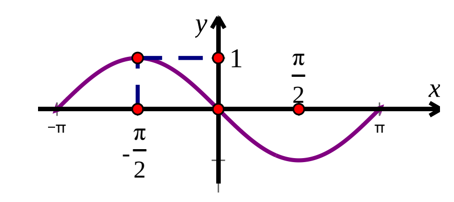
Hướng dẫn giải

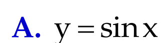
ĐÁP ÁN D.

Cần nhớ: Hai hàm số $y=\tan(ax+b)$ và $\cot(ax+b)$ có chu kỳ là $T=\dfrac{\pi}{|a|}$, $a\neq 0$.

$y=\tan 3\pi x$ có chu kỳ là $T=\dfrac{\pi}{3\pi}=\dfrac{1}{3}$.

Câu 35. Cho đồ thị với $x\in[-\pi;\pi]$. Đây là đồ thị của hàm số:

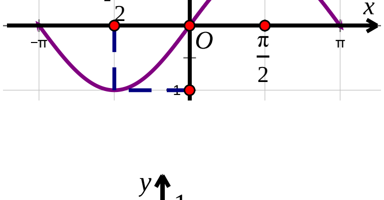



A. $y=\sin x$ **B.** $y=-\sin x$

C. $y=\sin|x|$ **D.** $y=|\sin x|$

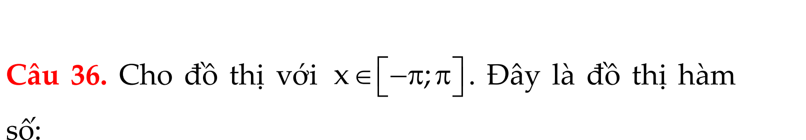
Hướng dẫn giải

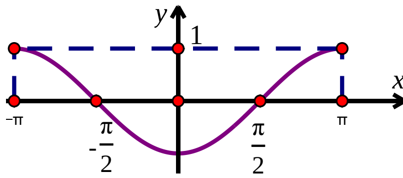
ĐÁP ÁN B.

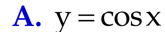


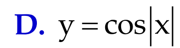
Ở sách giáo khoa đã vẽ đồ thị của hàm số $y=\sin x$.

Hai đồ thị hàm số $y=\sin x$ và $y=-\sin x$ đối xứng nhau qua trục Ox.

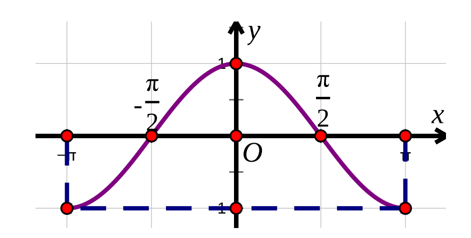

Câu 36. Cho đồ thị với $x\in[-\pi;\pi]$. Đây là đồ thị hàm số:




A. $y=\cos x$ **B.** $y=\sin x$


C. $y=-\cos x$ **D.** $y=\cos|x|$

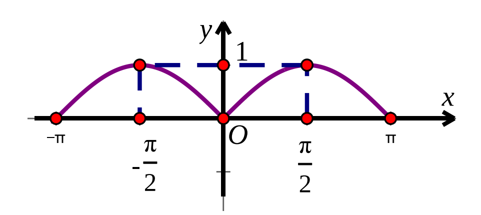

Hướng dẫn giải



ĐÁP ÁN C.

Ở sách giáo khoa ta đã vẽ đồ thi hàm số $y=\cos x$ với $x\in\left[-\pi;\pi\right]$.

Hai đồ thị hàm số $y=\cos x$ và đối xứng nhau qua Ox.



Câu 37. Cho đồ thị hàm số với $x\in\left[-\pi;\pi\right]$. Đây là đồ thị của hàm số:

A. $y=\left|\sin x\right|$ **B.** $y=\sin\left|x\right|$

C. $y=\left|\cos x\right|$ **D.** A và B

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Các em phải nắm chắc 2 phương pháp vẽ đồ thị (chứa giá trị tuyệt đối).

1. Từ đồ thị (C): $y=f\left(x\right)\Rightarrow\left(C_1\right):y=\left|f\left(x\right)\right|$.

Bước 1: Giữ nguyên phần đồ thị (C) phía trên Ox.

Bước 2: Lấy phần đồ thị của (C) phía dưới Ox đối xứng qua Ox.

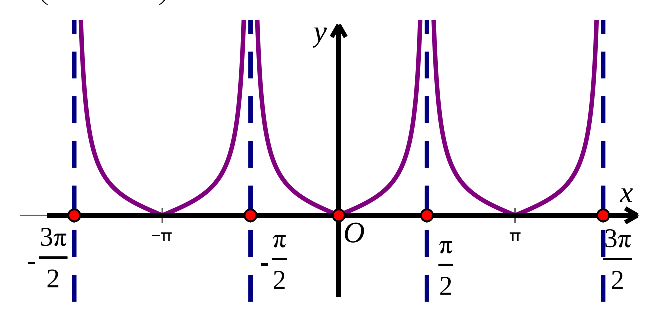
2. Từ đồ thị (C): $y=f\left(x\right)\Rightarrow\left(C_1\right):y=f\left(\left|x\right|\right)$

Bước 1: Giữ nguyên phần đồ thị của (C) phía bên phải Oy.

Bước 2: Lấy phần đồ thi của bước 1 đối xứng qua Oy.

Các em vẽ đồ thị của (C): và suy ra $\left(C_1\right):y=\left|\sin x\right|$, $\left(C_2\right):y=\sin\left|x\right|$.

Câu 38. Cho đồ thị với $x\in\left(-\dfrac{3\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right)$. Đây là đồ thị của hàm số:

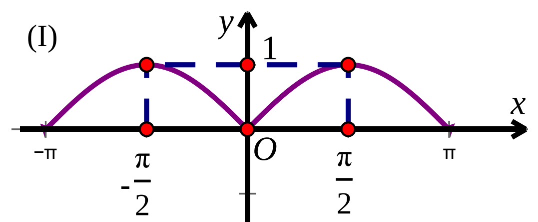


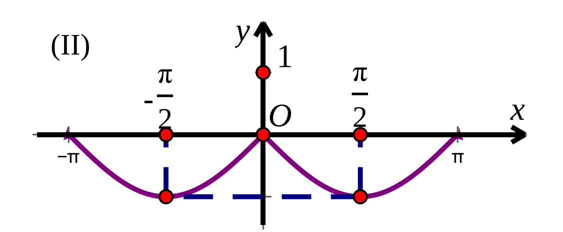
A. $y=\tan x$ **B.** $y=\cot x$ **C.** $y=\left|\tan x\right|$ **D.** $y=\left|\cot x\right|$

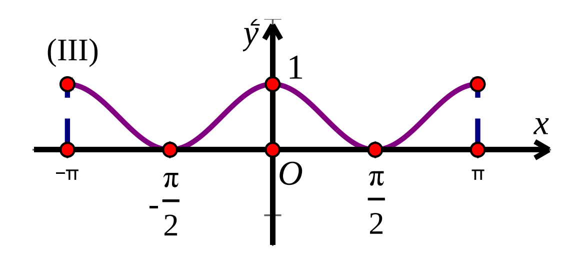
Hướng dẫn giải

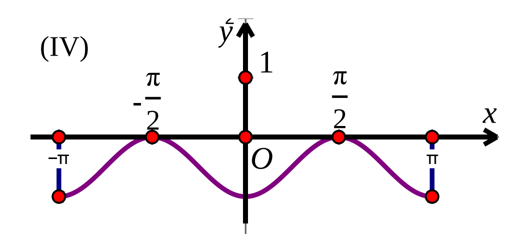
ĐÁP ÁN C.

Câu 39. Cho các đồ thị với $x\in\left[-\pi;\pi\right]$









Đồ thị của hàm số $y=-|\sin x|$ là:

A. I **B.** II **C.** III **D.** IV

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Từ $(C): y=\sin x$

$\Rightarrow (C_1): y=|\sin x|$

$\Rightarrow (C'_1): y=-|\sin x|$, (C_1) và (C'_1) đối xứng qua Ox.

BÀI 2. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

A. CƠ SỞ LÝ THUYẾT

1. Phương trình $\sin x = a$

- $\sin x = \sin\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{array}\right. \ (k \in Z)$

  $\sin x = a$. Điều kiện: $-1 \le a \le 1$.
- $\sin x = a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \arcsin a + k2\pi \\ x = \pi - \arcsin a + k2\pi \end{array}\right. \ (k \in Z)$
- $\sin u = -\sin v \Leftrightarrow \sin u = \sin(-v)$
- $\sin u = \cos v \Leftrightarrow \sin u = \sin\left(\frac{\pi}{2} - v\right)$
- $\sin u = -\cos v \Leftrightarrow \sin u = \sin\left(v - \frac{\pi}{2}\right)$

Các trường hợp đặc biệt

$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \ (k \in Z)$

$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \ (k \in Z)$

$\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \ (k \in Z)$

$\sin x = \pm 1 \Leftrightarrow \sin^2 x = 1 \Leftrightarrow \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in Z)$

2. Phương trình $\cos x = a$

- $\cos x = \cos\alpha \Leftrightarrow x = \pm\alpha + k2\pi \ (k \in Z)$
- $\cos x = a$. Điều kiện: $-1 \le a \le 1$.

  $\cos x = a \Leftrightarrow x = \pm \arccos a + k2\pi \ (k \in Z)$
- $\cos u = -\cos v \Leftrightarrow \cos u = \cos(\pi - v)$
- $\cos u = \sin v \Leftrightarrow \cos u = \cos\left(\frac{\pi}{2} - v\right)$
- $\cos u = -\sin v \Leftrightarrow \cos u = \cos\left(\frac{\pi}{2} + v\right)$

Các trường hợp đặc biệt:

$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in Z)$

$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi \ (k \in Z)$ $\quad$ $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi \ (k \in Z)$

$\cos x = \pm 1 \Leftrightarrow \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \sin^2 x = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \ (k \in Z)$

3. Phương trình $\tan x = a$

- $\tan x = \tan\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi \ (k \in Z)$
- $\tan x = a \Leftrightarrow x = \arctan a + k\pi (k \in Z)$
- $\tan u = -\tan v \Leftrightarrow \tan u = \tan(-v)$
- $\tan u = \cot v \Leftrightarrow \tan u = \tan\left(\frac{\pi}{2} - v\right)$
- $\tan u = -\cot v \Leftrightarrow \tan u = \tan\left(\frac{\pi}{2} + v\right)$

Các trường hợp đặc biệt:

$\tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \ (k \in Z)$ $\qquad$ $\tan x = \pm 1 \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi \ (k \in Z)$

4. Phương trình $\cot x = a$

$\cot x = \cot\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi \ (k \in Z)$

$\cot x = a \Leftrightarrow x = \text{arccot}\, a + k\pi \ (k \in Z)$

Các trường hợp đặc biệt:

$\cot x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in Z)$ $\qquad$ $\cot x = \pm 1 \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi \ (k \in Z)$

5. Một số điều cần chú ý:

a/ Khi giải phương trình có chứa các hàm số tang, cotang, có mẫu số hoặc chứa căn bậc chẵn, thì nhất thiết phải đặt điều kiện để phương trình xác định.

* Phương trình chứa tanx thì điều kiện: $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in Z)$.

* Phương trình chứa cotx thì điều kiện: $x \neq k\pi \ (k \in Z)$

* Phương trình chứa cả tanx và cotx thì điều kiện $x \neq k\frac{\pi}{2} \ (k \in Z)$

* Phương trình có mẫu số:

  - $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi \ (k \in Z)$
  - $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in Z)$
  - $\tan x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\frac{\pi}{2} \ (k \in Z)$

- $\cot x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\frac{\pi}{2}\ (k \in Z)$

b/ Khi tìm được nghiệm phải kiểm tra điều kiện. Ta thường dùng một trong các cách sau để kiểm tra điều kiện:

1. Kiểm tra trực tiếp bằng cách thay giá trị của x vào biểu thức điều kiện.
2. Dùng đường tròn lượng giác.
3. Giải các phương trình vô định.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

CÁC VÍ DỤ RÈN LUYỆN KĨ NĂNG

Ví dụ 1. Giải các phương trình

a) $\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=0$; b) $\cos\left(4x-\frac{\pi}{3}\right)=1$; c) $\cos\left(\frac{\pi}{5}-x\right)=-1$;

d) $\sin\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)=0$ e) $\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=1$; f) $\sin\left(\frac{\pi}{6}+2x\right)=-1$;

Hướng Dẫn Giải

a) $\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=0 \Leftrightarrow 2x+\frac{\pi}{6}=k\pi \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

b) $\cos\left(4x-\frac{\pi}{3}\right)=1 \Leftrightarrow 4x-\frac{\pi}{3}=k2\pi \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

c) $\cos\left(\frac{\pi}{5}-x\right)=-1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{5}-x=\pi+k2\pi \Leftrightarrow x=\frac{-4\pi}{5}-k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

d) $\sin\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)=0 \Leftrightarrow 3x+\frac{\pi}{3}=k\pi \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{9}+\frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

e) $\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=1 \Leftrightarrow \frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k2\pi \Leftrightarrow x=\frac{3\pi}{2}+k4\pi, k \in \mathbb{Z}$

f) $\sin\left(\frac{\pi}{6}+2x\right)=-1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{6}+2x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{3}+k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Ví dụ 2. Giải phương trình

a) $\sin 3x=\frac{1}{2}$ (1) ; b) $\cos 2x=-\frac{1}{2}$ (2)

c) $\tan\frac{x}{3}=2$ (3); d) $\cot\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{3}$ (4)

Giải

a) Ta có:

$$(1) \Leftrightarrow \sin 3x = \sin\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 3x = \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = \frac{5\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3} \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$

Vậy nghiệm của phương trình (1) là $x = \frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3}; x = \frac{5\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$

b) Ta có:

$$(2) \Leftrightarrow \cos 2x = \cos\frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 2x = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$

Vậy nghiệm của phương trình (*) là: $x = \pm\frac{\pi}{3} = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

c) $(3) \Leftrightarrow x = 3\arctan 2 + k3\pi, k \in \mathbb{Z}$

Vậy nghiệm của phương trình (*) là $x = 3\arctan 2 + k3\pi, k \in \mathbb{Z}$

d) Ta có:

$$(4) \Leftrightarrow \cot\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \cot\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6} + k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = -\frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$

Lời bình: Những phương trình ch trên là nhưng phương trình lượng giác cơ bản. Sử dụng MTCT ta có thể tìm được các giá trị đặc biệt của hàm số lượng giác

- Ở câu a) $\sin 3x = \frac{1}{2}$. Dùng MTCT (ở chế độ rad) ta ấn SHIF sin 1 ÷ 2 = ta được kết quả là $\frac{\pi}{6}$. Do đó: $\sin 3x = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$
- Hoàn toàn tương tự cho câu b) $\cos 2x = -\frac{1}{2}$. Ta ấn: SHIF cos – 1 ÷ 2 = ta được kết quả là $\frac{2\pi}{3}$. Do đó: $\cos 2x = -\frac{1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3}$
- Ở câu c) nếu ta dùng MTCT: Thử ấn SHIFT tan 2 = ta được kết quả

  tan⁻¹(2
  1.107148718

  Do đó, phương trình $\tan\frac{x}{3} = 2$ ta chỉ có thể ghi $\frac{x}{3} = \arctan 2 + k\pi$
- Trên MTCT không có hàm cot, tuy nhiên ta thừa biết $\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}$. Do đó, đối với câu d) $\cot\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$ ta ấn máy như sau:

  SHIT tan 1 ÷ √3 = ta được kết quả là $\frac{\pi}{6}$. Do đó: $\cot\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3} = \cot\frac{\pi}{6}$

Ví dụ 3. Giải phương trình

a) $\sin 4x = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$; b) $\cot g\left(x + 30^0\right) = \cot g\frac{x}{2}$.

c) $\cos^2 x = \frac{\sqrt{3}+2}{4}$; d) $\sin 2x = \cos 3x$.

Giải

a) Ta có:

$$\sin 4x = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x = x + \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 4x = \pi - \left(x + \frac{\pi}{3}\right) + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = \frac{2\pi}{15} + \frac{k2\pi}{5} \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$

Vậy nghiệm của phương trình (*) là $x = \frac{\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3}; x = \frac{2\pi}{15} + \frac{k2\pi}{5}$

b) Điều kiện: $\begin{cases} x + 30^0 \neq k.180^0 \\ \frac{x}{2} \neq n.180^0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -30^0 \\ x \neq n.360^0 \end{cases} (k, n \in \mathbb{Z})$

$$\cot g\left(x + 30^0\right) = \cot g\frac{x}{2} \Leftrightarrow x + 30^0 = \frac{x}{2} + k.180^0 \Leftrightarrow 2x + 60^0 = x + k.360^0$$

$$\Leftrightarrow x = -60^0 + k.360^0, k \in \mathbb{Z}$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = -60^0 + k.360^0, k \in \mathbb{Z}$

c) Ta có

$$\cos^2 x = \frac{\sqrt{3}+2}{4} \Leftrightarrow \frac{1+\cos 2x}{2} = \frac{\sqrt{3}+2}{4} \Leftrightarrow 2\left(1+\cos 2x\right) = \sqrt{3}+2$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow 2x = \pm\frac{\pi}{6} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Vậy nghiệm của phương trình (*) là $x = \frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Nhận xét: Ngoài cách giải trên ta có thể giải theo cách sau:

$$\cos^2 x = \frac{\sqrt{3}+2}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = \frac{\sqrt{3}+2}{4} \\ \cos x = -\frac{\sqrt{3}+2}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\arccos\left(\frac{\sqrt{3}+2}{4}\right) + k2\pi \\ x = \pm\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}+2}{4}\right) + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$

Tuy nhiên không nên giải theo cách này vì mất đi cái vẻ đẹp của toán học. Lời giải ban đầu sử dụng dụng công thức hạ bậc với các phép biến đổi hết sức đơn giản đưa về phương trình rất đẹp với đáp số.

d) Ta có

$$\sin 2x = \cos 3x \Leftrightarrow \cos 3x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x = \frac{\pi}{2} - 2x + k2\pi \\ 3x = -\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) + k2\pi \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{10} + \frac{k2\pi}{5} \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. ; k \in \mathbb{Z}$$

Vậy nghiệm của (*) là $x = \frac{\pi}{10} + \frac{k2\pi}{5}; x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Nhận xét: Phương trình $\sin 2x = \cos 3x$ được chuyển thành $\cos 3x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$, ta cũng có thể chuyển thành dạng sau: $\sin 2x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right)$.

Ví dụ 4. Giải và biện luận phương trình $\sin x = 4m - 1 (*)$

Giải

• Trường hợp 1: $|4m-1| > 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4m-1 > 1 \\ 4m-1 < -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > \frac{1}{2} \\ m < 0 \end{array}\right.$

Phương trình (*) vô nghiệm

• Trường hợp 2: $|4m-1| \le 1 \Leftrightarrow -1 \le 4m - 1 \le 1 \Leftrightarrow 0 \le m \le \frac{1}{2}$

Phương trình (*) có nghiệm $\left[\begin{array}{l} x = \arcsin(4m-1) + k2\pi \\ x = \pi - \arcsin(4m-1) + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$

Tóm lại:

• Nếu $\left[\begin{array}{l} m > \frac{1}{2} \\ m < 0 \end{array}\right.$ thì phương trình (*) vô nghiệm

Nếu $0 \le m \le \frac{1}{2}$ thì phương trình (*) có nghiệm $\left[\begin{array}{l} x = \arcsin(4m-1) + k2\pi \\ x = \pi - \arcsin(4m-1) + k2\pi \end{array}\right.$

Ví dụ 5. Tìm m để phương trình $\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = m$ có nghiệm $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

Giải

Ta có: $0 < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{4} < x + \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} < \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \le 1$

Phương trình đã cho có nghiệm $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ khi $\frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{m}{\sqrt{2}} \le 1 \Leftrightarrow 1 < m \le \sqrt{2}$

Ví dụ 6. Giải phương trình

a) $\sin 2x - \sin 2x \cos x = 0 \quad (1)$; b) $\sin x \cos 2x = \sin 2x \cos 3x \quad (2)$.

Giải

a) Ta có

$(1)\Leftrightarrow \sin 2x(1-\cos x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 2x=0\\ \cos x\ =1\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x=k\pi\\ x=k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow x=\frac{k\pi}{2},k\in\mathbb{Z}$

Vậy nghiệm của phương trình là $x=\frac{k\pi}{2},k\in\mathbb{Z}.$

Lưu ý: Một số học sinh mắc sai lầm nghiệm trọng (lỗi rất cơ bản) là rút gọn phương trình ban đầu cho $\sin 2x$, dẫn đến thiếu nghiệm

b) **Định hướng:** Cả hai vế phương trình đều cho dưới dạng tích của hai hàm lượng giác. Thông thường ta sử dụng công thức biến đổi tích thành tổng.

Ta nhắc lại: $\sin a\cos b=\frac{1}{2}\left[\sin(a-b)+\sin(a+b)\right]$

Ta có

$(2)\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\sin 3x-\sin x)=\frac{1}{2}(\sin 5x-\sin x)\Leftrightarrow \sin 5x=\sin 3x$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}5x=3x+k2\pi\\ 5x=\pi-3x+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4}\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}$

Vậy nghiệm của phương trình (*) là $x=k\pi; x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4},k\in\mathbb{Z}$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BT 1. Giải các phương trình

a) $\sin 2x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; b) $\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; c) $\tan\left(x-30^o\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Hướng dẫn

a) $\sin 2x=-\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow \sin 2x=\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x=-\frac{\pi}{4}+k2\pi\\ 2x=\pi+\frac{\pi}{4}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{8}+k\pi\\ x=\frac{5\pi}{8}+k\pi\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}$

b) $\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow \cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{5\pi}{6}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x+\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{6}+k2\pi\\ x+\frac{\pi}{3}=-\frac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\\ x=-\frac{7\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}$

c) Điều kiện: $x\neq 120^o+k.180^o,k\in\mathbb{Z}$

Ta có: $\tan\left(x-30^o\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}=\tan 30^o\Leftrightarrow x=60^o+k.180,k\in\mathbb{Z}$

BT 2. Giải các phương trình:

a) $\tan\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\cot gx=0;$ b) $\sin^2 4x-\sin^2\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)=0;$

Hướng dẫn

a) Điều kiện: $\begin{cases} \cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right) \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \end{cases}$.

Ta có

$$\tan\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\cot gx=0 \Leftrightarrow \tan\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=-\cot gx=\tan\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$$

$$\Leftrightarrow x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+x+k\pi \Leftrightarrow 0x=\frac{5\pi}{6}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$$

$\Rightarrow$ Phương trình (*) vô nghiệm

b) Ta có :

$$\sin^2 4x-\sin^2\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \sin 4x=\sin\left(3x-\frac{\pi}{3}\right) & (1a) \\ \sin 4x=\sin\left(\frac{\pi}{3}-3x\right) & (1b) \end{array}\right.$$

$$(1a) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x=3x-\frac{\pi}{3}+k2\pi \\ 4x=\pi-\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{3}+k2\pi \\ x=\frac{4\pi}{21}+\frac{k2\pi}{7} \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$$

$$(1b) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{21}+\frac{k2\pi}{7} \\ x=\frac{2\pi}{3}+k2\pi \end{array}\right.; k\in\mathbb{Z}$$

Hợp nghiệm ta được $x=-\frac{\pi}{3}+k\pi; x=\frac{\pi}{21}+\frac{k\pi}{7}, k\in\mathbb{Z}$

BT 3. Giải các phương trình

a) $\tan x^2=-1;$ b) $|\cos x|=\frac{1}{2};$ c) $\sin^2 x=\frac{2-\sqrt{2}}{4}$.

Hướng dẫn

a) $\tan x^2=-1=\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow x^2=-\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$

Do $x^2 \geq 0 \Rightarrow k \geq \frac{1}{4}, k\in\mathbb{Z} \Rightarrow k\in\{1,2,...,n,...\}$

Vậy $x=\pm\sqrt{-\frac{\pi}{4}+k\pi}, k=1,2,...$

b) Ta có : $|\cos x|=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x=\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3} \\ \cos x=-\frac{1}{2}=\cos\frac{2\pi}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi \\ x=\pm\frac{2\pi}{3}+k2\pi \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$

c) Ta có :

$$\sin^2 x=\frac{2-\sqrt{2}}{4} \Leftrightarrow \frac{1-\cos 2x}{2}=\frac{2-\sqrt{2}}{4} \Leftrightarrow \cos 2x=\frac{\sqrt{2}}{2}=\cos\frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{8}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$$

BT 4. Giải phương trình: $2\cos\left[\frac{\pi}{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]-\sqrt{2}=0 \quad (*)$.

Giải

$$(*) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}+k2\pi \\ \frac{\pi}{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\pi}{4}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}+4k & (1) \\ \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2}+4k & (2) \end{array}\right.$$

(1) có nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} -1\le \frac{1}{2}+4k\le 1 \\ k\in\mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow k=0$

Lúc đó: $(1)\Leftrightarrow x=\frac{7\pi}{12}+n2\pi$ hoặc $x=-\frac{\pi}{12}+n2\pi\,(n\in\mathbb{Z})$

Lý luận giống $(1)\Rightarrow(2)$ có nghiệm $\Leftrightarrow k=0$

Lúc đó $(2)\Leftrightarrow x=\frac{11\pi}{12}+n2\pi$ hoặc $x=-\frac{5\pi}{12}+n2\pi\,(n\in\mathbb{Z})$

Vậy (*) có nghiệm $x=\frac{7\pi}{12}+k2\pi, x=\frac{11\pi}{12}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$

BT 5. a) Tìm m để phương trình $\cos 2x=m-1$ có nghiệm $x\in\left(\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right)$

b) Tìm m để $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=3m-1(*)$ có nghiệm $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

Giải

a) Ta có : $x\in\left(\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right)\Rightarrow 2x\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)\Rightarrow -1\le\cos 2x<0$

$\cos 2x=m-1$ có nghiệm $x\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$ khi $-1\le m-1<0\Leftrightarrow 0\le m<1$.

b) Ta có : $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow x+\frac{\pi}{4}\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]\Rightarrow\frac{\sqrt{2}}{2}\le\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\le 1$

(*) có nghiệm $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ khi $\frac{\sqrt{2}}{2}\le 3m-1\le 1\Leftrightarrow\frac{\sqrt{2}+2}{6}\le m\le\frac{2}{3}$.

BT 6. Xác định m để phương trình $\sin^6 x+\cos^6 x=m$ có nghiệm.

Hướng dẫn giải

$m=\sin^6 x+\cos^6 =1-\frac{3}{4}\sin^2 2x=1-\frac{3}{4}\left(\frac{1-\cos 4x}{2}\right)\Leftrightarrow\cos 4x=\frac{8m-5}{3}$

Phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow -1\le\frac{8m-5}{3}\le 1\Leftrightarrow\frac{1}{4}\le m\le 1.$

BT 7. Giải phương trình:

a) $\cos x\cos 7x=\cos 3x\cos 5x;$ b) $2\cos 3x+\sqrt{3}\sin x+\cos x=0.$

Hướng dẫn

a) $\cos x\cos 7x = \cos 3x\cos 5x \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\cos 8x + \cos 6x) = \frac{1}{2}(\cos 8x + \cos 2x)$

$\Leftrightarrow \cos 6x = \cos 2x \Leftrightarrow 6x = \pm 2x + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$

b) Ta có

$2\cos 3x + \sqrt{3}\sin x + \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos(\pi - 3x)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - \frac{\pi}{3} = \pi - 3x + k2\pi \\ x - \frac{\pi}{3} = -\pi + 3x + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{3} - k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$

BT 8. Giải phương trình: $(2\cos x - 1)(2\sin x + \cos x) = \sin 2x - \sin x$

Hướng dẫn giải

pt $\Leftrightarrow (2\cos x - 1)(2\sin x + \cos x) = \sin x(2\cos x - 1)$

$$\Leftrightarrow (2\cos x - 1)(\sin x + \cos x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$

BT 9. Giải phương trình: $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = 0$

Hướng dẫn giải

pt $\Leftrightarrow (\cos x + \cos 4x) + (\cos 2x + \cos 3x) = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos\frac{5x}{2}\left(\cos\frac{3x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow 4\cos\frac{5x}{2}.\cos x.\cos\frac{x}{2} = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos\frac{5x}{2} = 0 \\ \cos x = 0 \\ \cos\frac{x}{2} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{5} + \frac{k2\pi}{5} \\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \pi + k2\pi \end{array}\right.$$

BT 10. Tìm tổng các nghiệm của phương trình

a) $2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$ trên $(-\pi; \pi)$; b) $\sin\left(5x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ trên $[0; \pi]$

Hướng dẫn giải

a) pt $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$

Vì $x \in (-\pi; \pi)$ nên:

⊕ Với $x = k2\pi$ ta chỉ chọn được $k=0 \Rightarrow x=0$

⊕ Với $x = \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi$ ta chỉ chọn được $k=0 \Rightarrow x=\dfrac{2\pi}{3}$

b) pt $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{14} + \dfrac{k2\pi}{7} \\ x = -\dfrac{\pi}{18} + \dfrac{k2\pi}{3} \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$

Vì $x \in [0; \pi]$ nên:

⊕ Với $x = \dfrac{\pi}{14} + \dfrac{k2\pi}{7} \Rightarrow 0 \le \dfrac{\pi}{14} + \dfrac{k2\pi}{7} \le \pi \Leftrightarrow -\dfrac{1}{4} \le k \le \dfrac{13}{4} \Rightarrow k \in \{0,1,2,3\}$

⊕ Với $x = -\dfrac{\pi}{18} + \dfrac{k2\pi}{3} \Rightarrow 0 \le -\dfrac{\pi}{18} + \dfrac{k2\pi}{3} \le \pi \Leftrightarrow \dfrac{1}{12} \le k \le \dfrac{9}{12} \Rightarrow k = 1$

Vậy tổng các nghiệm là $\dfrac{47\pi}{18}$

C. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Nghiệm của phương trình $\sin\dfrac{x}{5} = -\dfrac{1}{2}$ là

A. $x = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ và $x = \dfrac{7\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

B. $x = -\dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ và $x = \dfrac{35\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = -\dfrac{5\pi}{6} + 10k\pi, k \in \mathbb{Z}$ và $x = \dfrac{35\pi}{6} + 10k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

D. $x = -\dfrac{5\pi}{6} + k1800^o, k \in \mathbb{Z}$ và $x = \dfrac{35\pi}{6} + k1800^o, k \in \mathbb{Z}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

$$\sin\frac{x}{5} = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{x}{5} = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \dfrac{x}{5} = \pi + \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{5\pi}{6} + 10k\pi \\ x = \dfrac{35\pi}{6} + 10k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

Câu 2. Nghiệm của phương trình $\cos 2x = -\dfrac{1}{2}$ trong khoảng $-\pi < x < \pi$ là

A. $-\dfrac{\pi}{6}$ và $\dfrac{\pi}{6}$ **B.** $-\dfrac{\pi}{3}$ và $\dfrac{\pi}{3}$ **C.** $-\dfrac{\pi}{6}$ và $\dfrac{7\pi}{12}$ **D.** $\dfrac{\pi}{3}$ và $\dfrac{\pi}{6}$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

$\cos 2x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 2x = \cos\frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi$.

Câu 3. Nghiệm của phương trình $\tan x = \tan 25^o$ là

A. $x = 25^o + k360^o$ **và** $x = 155^o + k360^o$, $k \in \mathbb{Z}$.

B. $x = 25^o + k180^o$ **và** $x = 155^o + k180^o$, $k \in \mathbb{Z}$

C. $x = 25^o + k360^o$ **và** $x = -25^o + k360^o$, $k \in \mathbb{Z}$

D. $x = 25^o + k180^o$, $k \in \mathbb{Z}$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Câu 4. Nghiệm của phương trình $\tan\left(x - \frac{\pi}{12}\right) = 5$ là

A. $x = 20^o + k180^o$, $k \in \mathbb{Z}$

B. $x = 15^o + 5 + k180^o$, $k \in \mathbb{Z}$

C. $x = 15^o + \arctan 5 + k180^o$, $k \in \mathbb{Z}$

D. $x = \frac{\pi}{12} + \arctan 5 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

$\tan\left(x - 15^o\right) = 5 \Leftrightarrow \tan\left(x - \frac{\pi}{12}\right) = \arctan 5$

$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{12} = \arctan 5 + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + \arctan 5 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Câu 5. Nghiệm của phương trình $\cos x = \sin\left(-\frac{1}{3}\right)$ là

A. $x = \frac{1}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ và $x = -\frac{1}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

B. $x = \frac{1}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ và $x = \frac{3\pi + 1}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

C. $x = \frac{3\pi + 2}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ và $x = -\frac{3\pi + 2}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

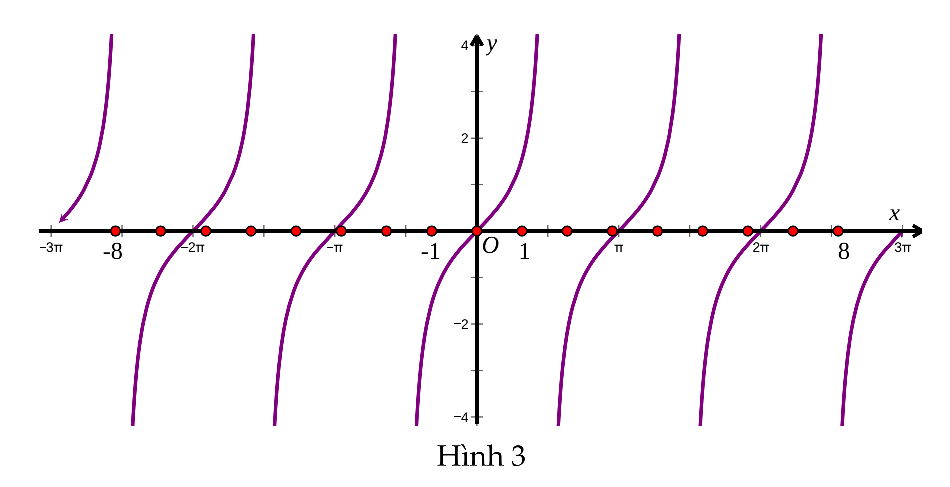
D. $x = \frac{3\pi + 2}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ và $x = \frac{3\pi - 2}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

$\cos x = \sin\left(-\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow \cos x = \cos\frac{3\pi + 2}{6} \Leftrightarrow x = \pm\frac{3\pi + 2}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Câu 6. Cho đồ thị hàm số $y = \tan x$ với $-8 \le x \le 8$ (H.3)



Hình 3

a. Nghiệm của phương trình $\tan x = 0$ là

A. 0

B. $0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi$

C. $-4\pi, -3\pi, -2\pi, -\pi, 0$

D. $-2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi$

b. Nghiệm của phương trình $\tan x = -1$ là

A. $-\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

B. $-\frac{9\pi}{4}, -\frac{5\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}$

C. $\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$

D. $-\frac{9\pi}{4}, -\frac{5\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$

Hướng dẫn giải

a. **ĐÁP ÁN D.** b. **ĐÁP ÁN D.**

$\tan x = -1 \Leftrightarrow \tan x = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Với $-8 \le x \le 8$, suy ra:

a. x có thể là một trong các giá trị: $-2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi$.

(Trên đồ thị là hoành độ các giao điểm của trục hoành với đồ thị hàm số $y = \tan x$).

b. x có thể là một trong các giá trị: $-\frac{9\pi}{4}, -\frac{5\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$.

(Trên đồ thị là hoành độ các giao điểm của đường thẳng $y = -1$ với đồ thị hàm số $y = \tan x$).

Câu 7. Phương trình $\cot x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, với $0 < x < \frac{\pi}{2}$:

A. có nghiệm là $-\frac{\pi}{9}$

B. có nghiệm là $-\frac{\pi}{3}$

C. có nghiệm là $-\frac{\pi}{9} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

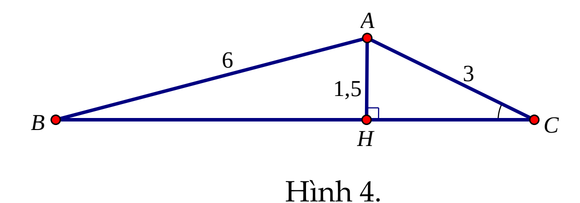
D. không có nghiệm

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Với $0 < x < \frac{\pi}{2}$ thì $\cot x > 0$.

Câu 8. Cho tam giác ABC có $AB=6,\ AC=3$ và đường cao $AH=1,5\ (H.4)$



Hình 4.

a. Góc C bằng

A. $\frac{\pi}{6}$

B. $\arcsin\frac{1}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

C. $\pi-\arcsin\frac{1}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

D. $\pi-\arcsin\frac{1}{2}$

b. Góc B bằng

A. $\arcsin\frac{1}{4}$

B. $\arcsin\frac{1}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

C. $\pi-\arcsin\frac{1}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

D. $\pi-\arcsin\frac{1}{4}$

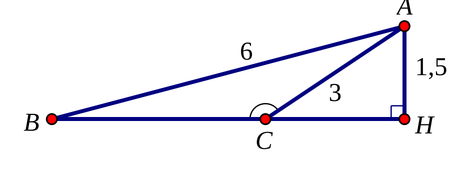
Hướng dẫn giải

a. ĐÁP ÁN A. **b. ĐÁP ÁN A.**

$\sin B=\frac{1,5}{6}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow \sin B=\arcsin\frac{1}{4}\Leftrightarrow B=\arcsin\frac{1}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Vì B là góc nhọn trong tam giác ABC nên $B=\arcsin\frac{1}{4}$.

Câu 9. Cho tam giác ABC có $AB=6;\ AC=3$ và đường cao $AH=1,5\ (H.5)$. Góc C bằng



Hình 5

A. $\frac{\pi}{6}$

B. $\arcsin\frac{1}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

C. $\pi-\arcsin\frac{1}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

D. $\pi-\arcsin\frac{1}{2}$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

$$\sin ACH=\frac{1,5}{3}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \sin ACH=\sin\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}ACH=\frac{\pi}{6}\\ ACB=\pi-\frac{\pi}{6}=\pi-\arcsin\frac{1}{2}\end{array}\right.$$

Câu 10. Số nghiệm của phương trình $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-1$ thuộc đoạn $[0;\pi]$ là

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Trên đoạn $\left[0;\pi\right]$, đồ thị hàm số $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ không cắt đường thẳng $y=-1$. Do đó phương trình $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-1$ không có nghiệm.

Câu 11. Số nghiệm của phương trình $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-1$ thuộc đoạn $\left[0;8\pi\right]$ là

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Trên đoạn $\left[0;8\pi\right]$, đồ thị hàm số $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ có 3 điểm thấp nhất nằm phía dưới trục hoành, nên đường thẳng $y=-1$ cắt đồ thị hàm số tại 3 điểm. Do đó phương trình $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-1$ có 3 nghiệm.

Câu 12. Số nghiệm của phương trình $\cos x+1=0$ thuộc khoảng $\left(0;\pi\right)$ là

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Với $x\in\left(0;\pi\right)$ thì $y=\cos x+1\in\left(0;2\right)$, do đó phương trình $\cos x+1=0$ không có nghiệm.

Câu 13. Các nghiệm của phương trình $\frac{\cos 3x}{\cos x+1}=0$ thuộc đoạn $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ là

A. $0, \frac{\pi}{6}$ **B.** $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}$ **C.** $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}$ **D.** $-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

$\frac{\cos 3x}{\cos x+1}=0 \Leftrightarrow \cos 3x=0, \forall x\neq\left(2k-1\right)\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Với $x=\frac{\pi}{6}\neq\left(2k-1\right)\pi, k\in\mathbb{Z}$, ta có $\cos\frac{3\pi}{6}=0$.

Với $x=\frac{\pi}{2}\neq\left(2k-1\right)\pi, k\in\mathbb{Z}$, ta có $\cos\frac{3\pi}{2}=0$.

Câu 14. Nghiệm của phương trình $\sin x=1$ là

A. $x=\frac{\pi}{2}+k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$ **B.** $x=\frac{\pi}{2}\left(k\in\mathbb{Z}\right)$ **C.** $x=\pi+k2\pi, \left(k\in\mathbb{Z}\right)$ **D.** $x=\frac{\pi}{2}+k2\pi, \left(k\in\mathbb{Z}\right)$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Câu 15. Nghiệm của phương trình $\sin x = -1$ là

A. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ **B.** $x = \pi + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ **C.** $x = \frac{3\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ **D.** $x = -\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

$\sin x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Câu 16. Nghiệm của phương trình $\sin x = 0$ là

A. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ **B.** $x = -\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ **C.** $x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ **D. B và C đúng**

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Câu 17. Nghiệm của phương trình $\cos x = 1$ là

A. $x = k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ **B.** $x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ **C.** $x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ **D.** $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Câu 18. Nghiệm của phương trình $\cos x = -1$ là

A. $x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ **B.** $x = \pi + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ **C.** $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ **D.** $x = -\pi + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

$\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Câu 19. Nghiệm của phương trình $\cos x = 0$ là

A. $x = 180^o + k360^o,\ k \in \mathbb{Z}$ **B.** $x = 90^o + k180^o,\ k \in \mathbb{Z}$

C. $x = 90^o + k360^o,\ k \in \mathbb{Z}$ **D.** $x = k90^o,\ k \in \mathbb{Z}$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = 90^o + k180^o,\ k \in \mathbb{Z}$.

Câu 20. Nghiệm của phương trình $\tan x = 1$ là

A. $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ **B.** $x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ **C.** $x = \frac{3\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ **D.** $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

$\tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Câu 21. Nghiệm của phương trình $\tan x = -1$ là

A. $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

B. $x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

C. $x = (-1)^{2k+1}\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

D. B và C đúng

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

$\tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi = (-1)^{2k+1}.\frac{\pi}{4} + k\pi$.

Câu 22. Phương trình $\tan x = 0$ có nghiệm là

A. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

B. $x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

C. $x = k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

D. $x = \frac{3\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

$\tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Câu 23. Phương trình $\cot x = 1$ có nghiệm là

A. $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

B. $x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

C. $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

D. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

$\cot x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Câu 24. Phương trình $\cot x = -1$ có nghiệm là

A. $x = (-1)^{2k+1}\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

B. $x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

C. $x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

D. tất cả đều đúng

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

$\cot x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} = (-1)^{2k+1}.\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Câu 25. Phương trình $\cot x = 0$ có nghiệm là

A. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

B. $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

C. $x = \frac{3\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

D. tất cả đều đúng

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

$\cot x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Câu 26. Nghiệm của phương trình $\cot x = \frac{1}{2}$ là

A. $x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ **B.** $x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ **C.** $x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ **D.** $x = \pm\frac{\pi}{4} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

$\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Câu 27. Nghiệm của phương trình $\cos 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ là

A. $x = \pm\frac{5\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ **B.** $x = \pm\frac{5\pi}{12} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ **C.** $x = \pm\frac{\pi}{8} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ **D.** $x = \pm\frac{5\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Ta có: $\cos 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow 2x = \pm\frac{5\pi}{6} + k2\pi \Leftrightarrow x = \pm\frac{5\pi}{12} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Câu 28. Nghiệm của phương trình $2\sin x + \sqrt{3} = 0$ là

A. $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

B. $x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

C. $x = \frac{4\pi}{3} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

D. $x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Ta có: $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \pi + \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{4\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow x = (-1)^{k+1}.\frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Câu 29. Nghiệm của phương trình $2\sin x + \sqrt{2} = 0$ là

A. $x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

B. $x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

C. $x = \frac{5\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

D. đáp án khác

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Ta có: $2\sin x + \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow x = (-1)^{k+1}.\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Câu 30. Phương trình $2\cos 2x = \sqrt{3}$ có nghiệm là

A. $x=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ **B.** $x=\pm\frac{\pi}{12}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ **C.** $x=\pm\frac{\pi}{4}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ **D.** $x=\pm\frac{\pi}{6}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Ta có: $\cos 2x=\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow 2x=\pm\frac{\pi}{6}+k2\pi\Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{12}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Câu 31. Nghiệm của phương trình $\tan 2x=-\sqrt{3}$ là

A. $x=-\frac{\pi}{6}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ **B.** $x=\frac{\pi}{6}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ **C.** $x=-\frac{\pi}{12}+k\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$ **D.** $x=-\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Ta có: $\tan 2x=-\sqrt{3}=\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)\Leftrightarrow 2x=-\frac{\pi}{6}+k\pi\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$.

Câu 32. Nghiệm của phương trình $\cot x=-\sqrt{3}$ là

A. $x=\frac{\pi}{6}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ **B.** $x=-\frac{\pi}{6}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ **C.** $x=-\frac{\pi}{3}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ **D.** $x=\frac{4\pi}{3}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Ta có: $\cot x=-\sqrt{3}=\cot\left(-\frac{\pi}{6}\right)\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{6}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

BÀI 3. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC THƯỜNG GẶP

A. CƠ SỞ LÝ THUYẾT VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Phương trình bậc hai đối với hàm số lượng giác

Phương trình bậc hai đối với phương trình lương giác là phương trình có một trong 4 dạng sau:

1. $a\sin^2 x + b\sin x + c = 0$. Cách giải: $t = \sin x,\ -1 \le t \le 1$
2. $a\cos^2 x + b\cos x + c = 0$. Cách giải: $t = \cos x,\ -1 \le t \le 1$
3. $a\tan^2 x + b\tan x + c = 0$. Cách giải: $t = \tan x,\ x \ne \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
4. $a\cot^2 x + b\cot x + c = 0$. Cách giải: $t = \cot x,\ x \ne k\pi, k \in \mathbb{Z}$

CÁC VÍ DỤ RÈN LUYỆN KĨ NĂNG

Ví dụ 1. Giải các phương trình sau

a) $2\sin^2 x + 5\cos x + 1 = 0$;

b) $\tan^2 x + \left(1 - \sqrt{3}\right)\tan x - \sqrt{3} = 0$

c) $\tan^2 x + \cot^2 x = 2$;

d) $\cot^2 2x - 4\cot 2x + 3 = 0$

Hướng dẫn giải

a)

$$2\sin^2 x + 5\cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow 2\left(1 - \cos^2 x\right) + 5\cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow -2\cos^2 x + 5\cos x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = -\frac{1}{2} \\ \cos x = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

b) Điều kiện: $\cos x \ne 0$

$$\tan^2 x + \left(1 - \sqrt{3}\right)\tan x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = \sqrt{3} \\ \tan x = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$

c) Điều kiện: $\sin 2x \ne 0$

Đặt $t = \tan^2 x$, phương trình đã cho trở thành

$$t + \frac{1}{t} - 2 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow \tan^2 x = 1 \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

d) Điều kiện: $\sin x \ne 0$

$$\cot^2 2x - 4\cot 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cot 2x = 3\\ \cot 2x = 1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \frac{1}{2}\text{arccot}\,3 + \frac{k\pi}{2}\\ x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}\end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$

Ví dụ 2. Giải các phương trình sau

a) $\cos 2x + 9\cos x + 5 = 0$;   b) $\frac{1}{\cos^2 x} - \left(3+\sqrt{3}\right)\tan x - 3 + \sqrt{3} = 0$

Hướng dẫn giải

a) $\cos 2x + 9\cos x + 5 = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x + 9\cos x + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = -\frac{1}{2}\\ \cos x = 4\end{array}\right. \Leftrightarrow x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

b) Điều kiện: $\cos x \neq 0$

$$\frac{1}{\cos^2 x} - \left(3+\sqrt{3}\right)\tan x + 1 + \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \tan^2 x - \left(3+\sqrt{3}\right)\tan x + \sqrt{3} + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x = 1\\ \tan x = \sqrt{3} + 2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{4} + k\pi\\ x = \arctan\left(\sqrt{3}+2\right) + k\pi\end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$

Ví dụ 3. Xác định m để phương trình $\cos x - 2m\cos x + 6m - 9 = 0(*)$ có nghiệm $x \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$

Hướng dẫn giải

Đặt $t = \cos x$. Với $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < t \leq 1$

Ta có $t^2 - 2m + 6m - 9 = 0 \Leftrightarrow t = 2m - 3$ hoặc $t = 3 > 1$ (loại)

Phương trình (*) có nghiệm $x \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow 0 < 2m - 3 \leq 1 \Leftrightarrow \frac{3}{2} < m \leq 2.$

Ví dụ 4. Xác định m để phương trình $2\cos^2 x - (m+2)\cos x + m = 0(*)$ có đúng hai nghiệm $x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

Hướng dẫn giải

Đặt $t = \cos x, |t| \leq 1$. với $x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow t \in [0;1]$

Ta có: $2t^2 - (m+2)t + m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t = 1 \in [0;1]\\ t = \frac{m}{2}\end{array}\right.$

Để (*) có đúng hai nghiệm $x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ thì $\frac{m}{2} \in [0;1) \Leftrightarrow m \in [0;2)$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BT 1. Giải phương trình: $5\sin x - 2 = 3(1-\sin x)\tan^2 x$.

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow \sin x \neq \pm 1$

$$pt \Leftrightarrow 5\sin x - 2 = 3(1-\sin x)\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \Leftrightarrow 5\sin x - 2 = 3(1-\sin x)\frac{\sin^2 x}{1-\sin^2 x}$$

$$\Leftrightarrow 5\sin x - 2 = 3\frac{\sin^2 x}{1+\sin x} \Leftrightarrow 2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = \frac{1}{2}\\ \sin x = -2\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{6} + k2\pi\\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi\end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$

BT 2. Xác định a để hai phương trình sau tương đương

$$\sin 2x = 4\sin x \quad (1)$$

$$\cos 2x - \sin^2 x + a\sin x = \sin x + 1 \quad (2)$$

Hướng dẫn giải

$$(1) \Leftrightarrow \sin(2\cos x - 4) = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0$$

$$(2) \Leftrightarrow 3\sin^2 x + (1-a)\sin x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 0\\ \sin x = \frac{a-1}{3}\end{array}\right.$$

(1) và (2) tương đương $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 0\\ |\sin x| > 1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{a-1}{3} = 0\\ \left|\frac{a-1}{3}\right| > 1\end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a = 1\\ \frac{a-1}{3} > 1 \vee \frac{a-1}{3} < -1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a = 1\\ a > 4\\ a < -2\end{array}\right.$$

BT 3. Giải phương trình: $\dfrac{4\sin^2 2x + 6\sin^2 x - 9 - 3\cos 2x}{\cos x} = 0$.

Hướng dẫn giải

Ta có

Điều kiện: $\cos x \neq 0$

$$pt \Leftrightarrow 4\sin^2 2x + 6\sin^2 x - 9 - 3\cos 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow 4(1-\cos^2 2x) + 6.\frac{1}{2}(1-\cos 2x) - 9 - 3\cos 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}\cos x = 0 & \text{(loại do điều kiện)}\\ \cos x = \pm\frac{1}{2} & \text{(nhận)}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi\\ x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi\end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$

BT 4. Giải phương trình: $\dfrac{\cos x\left(2\sin x+3\sqrt{2}\right)-2\cos^2 x-1}{1+\sin 2x}=1.$

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $1+\sin 2x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -\dfrac{\pi}{4}+m\pi$

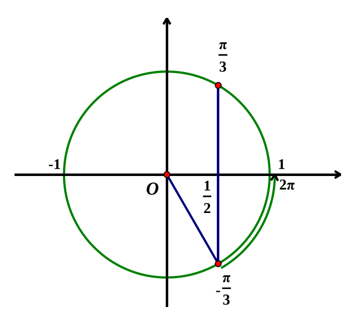
$\text{pt}\Leftrightarrow \cos x\left(2\sin x+3\sqrt{2}\right)-2\cos^2 x-1=1+\sin 2x \Leftrightarrow 2\cos^2 x-3\sqrt{2}\cos x+2=0$

$\Leftrightarrow \cos x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{4}+k2\pi \\ x=-\dfrac{\pi}{4}+k2\pi (\text{loại do điều kiện}) \end{array}\right. \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+k2\pi$

BT 5. Xác định m để phương trình

$\cos^2 x+(m-4)\cos x-2m+4=0(*)$ có đúng 2 nghiệm $x\in\left[-\dfrac{\pi}{3};2\pi\right]$

Giải



$(*)\Leftrightarrow(\cos x-2)(\cos x+m-2)=0\Leftrightarrow \cos x=2-m$ hoặc $\cos x=2>1$ (loại)

Đặt $t=\cos x$, với $x\in\left[-\dfrac{\pi}{3};2\pi\right]\Rightarrow t\in\left[-1;\dfrac{1}{2}\right]$

Dựa vào đường tròn lượng giác ta thấy :

$(*)$ có đúng hai nghiệm $x\in\left[-\dfrac{\pi}{3};2\pi\right]$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t=1 \\ -1<t<\dfrac{1}{2} \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} 2-m=1 \\ -1<2-m<\dfrac{1}{2} \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m=1 \\ \dfrac{3}{2}<m<3 \end{array}\right.$

Dạng 2. Phương trình bậc nhất theo sinx và cosx

Phương pháp

Cách 1

- Chia hai vế phương trình cho $\sqrt{a^2+b^2}$ ta được:

$$(1)\Leftrightarrow \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

- Đặt: $\sin\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \cos\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ $(\alpha \in [0, 2\pi])$ phương trình trở thành:

  $\sin\alpha.\sin x + \cos\alpha.\cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \Leftrightarrow \cos(x-\alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\beta$

  $\Leftrightarrow x = \alpha \pm \beta + k2\pi \quad (k \in Z)$

- Điều kiện để phương trình có nghiệm là:

$$\left|\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \le 1 \Leftrightarrow a^2+b^2 \ge c^2.$$

Cách 2

- Xét $x = \pi + k2\pi \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ có là nghiệm hay không?

- Xét $x \ne \pi + k2\pi \Leftrightarrow \cos\frac{x}{2} \ne 0.$

  Đặt: $t = \tan\frac{x}{2}$, thay $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, ta được phương trình bậc hai theo t:

$$(b+c)t^2 - 2at + c - b = 0 \quad (3)$$

Vì $x \ne \pi + k2\pi \Leftrightarrow b + c \ne 0$, nên (3) có nghiệm khi:

$$\Delta' = a^2 - (c^2 - b^2) \ge 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \ge c^2.$$

Giải (3), với mỗi nghiệm t_0, ta có phương trình: $\tan\frac{x}{2} = t_0.$

Ghi chú

1/ Cách 2 thường dùng để giải và biện luận.

2/ Cho dù cách 1 hay cách 2 thì điều kiện để phương trình có nghiệm: $a^2+b^2 \ge c^2$.

3/ Bất đẳng thức B.C.S:

$$|y| = |a.\sin x + b.\cos x| \le \sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x} = \sqrt{a^2+b^2}$$

$$\Leftrightarrow \min y = -\sqrt{a^2+b^2} \text{ và } \max y = \sqrt{a^2+b^2} \Leftrightarrow \frac{\sin x}{a} = \frac{\cos x}{b} \Leftrightarrow \tan x = \frac{a}{b}$$

CÁC VÍ DỤ RÈN LUYỆN KĨ NĂNG

Ví dụ 1. Giải phương trình

a) $\sin x + 2\cos x = 5$; b) $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 1$; c) $5\cos x + 3\sin x = 4\sqrt{2}$.

Giải

a) Ta thấy $a^2 + b^2 = 5 < c^2 = 25 \Rightarrow$ phương trình đã cho vô nghiệm.

b) Chia hai vế của (1) cho $\sqrt{a^2+b^2}=2$, ta được :

$$\frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \sin x\cos\frac{\pi}{3}-\cos x\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}+k2\pi\\ x-\frac{\pi}{3}=\pi-\frac{\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\\ x=\frac{7\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}$$

Vậy nghiệm của phương trình (1) là $x=\frac{\pi}{2}+k2\pi;x=\frac{7\pi}{6}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}$

b) Chia hai vế của (1) cho $\sqrt{a^2+b^2}=34$, ta được :

$$\frac{5}{\sqrt{34}}\cos x+\frac{3}{\sqrt{34}}\sin x=\frac{4}{\sqrt{17}}(*)$$

Đặt $\cos\varphi=\frac{5}{\sqrt{34}},\sin\varphi=\frac{3}{\sqrt{34}},\varphi\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

Lúc đó : pt $\Leftrightarrow\cos(x-\varphi)=\frac{4}{\sqrt{17}}\Leftrightarrow x=\pm\arccos\frac{4}{\sqrt{17}}+\varphi+k2\pi,k\in\mathbb{Z}$

Ví dụ 2. Tìm nghiệm của phương trình $\cos 7x-\sqrt{3}\sin 7x=-\sqrt{2}\,(*)$ thỏa mãn điều kiện $\frac{2\pi}{5}<x<\frac{6\pi}{7}$.

Giải

Ta có :

$$(*)\Leftrightarrow\frac{1}{2}\cos 7x-\frac{3}{2}\sin 7x=-\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow\sin\frac{\pi}{6}\cos 7x-\cos\frac{\pi}{6}\sin 7x=\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow\sin\left(\frac{\pi}{6}-7x\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\Leftrightarrow\sin\left(7x-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}7x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{4}+k2\pi\\ 7x-\frac{\pi}{6}=\frac{3\pi}{4}+m2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{5\pi}{84}+\frac{k2\pi}{7}\\ x=\frac{11\pi}{84}+\frac{m2\pi}{7}\end{array}\right.(k,m\in\mathbb{Z})$$

Do

$$\frac{2\pi}{5}<x<\frac{6\pi}{7}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\frac{2\pi}{5}<\frac{5\pi}{84}+\frac{k2\pi}{7}<\frac{6\pi}{7}\\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}\\ \begin{cases}\frac{2\pi}{5}<\frac{11\pi}{84}+\frac{m2\pi}{7}<\frac{6\pi}{7}\\ m\in\mathbb{Z}\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\frac{2}{5}-\frac{5}{84}<\frac{2k}{7}<\frac{6}{7}-\frac{5}{84}\\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}\\ \begin{cases}\frac{2}{5}-\frac{11}{84}<\frac{2m}{7}<\frac{6}{7}-\frac{11}{84}\\ m\in\mathbb{Z}\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\frac{7}{5}-\frac{5}{24}<k<3-\frac{5}{24}\\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}\\ \begin{cases}\frac{7}{5}-\frac{11}{24}<m<3-\frac{11}{24}\\ m\in\mathbb{Z}\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}k=2\\ m=1\\ m=2\end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của phương trình (*) là $x=\frac{52\pi}{84};x=\frac{35\pi}{84};x=\frac{59\pi}{84}$.

Ví dụ 3. Giải phương trình $\sin 2x+1=6\sin x+\cos 2x$.

Định hướng: Chuyển cos2x sang vế trái, dùng công thức nhân đôi $1-\cos 2x=2\sin^2 x$. Lúc đó phương trình đưa về phương trình tích với sự xuất hiện của nhân tử chung là $\sin x$

Giải

Ta có:

$\sin 2x+1=6\sin x+\cos 2x\Leftrightarrow\left(\sin 2x-6\sin x\right)+\left(1-\cos 2x\right)=0$

$\Leftrightarrow 2\sin x\left(\cos x-3\right)+2\sin^2 x=0\Leftrightarrow 2\sin x\left(\cos x-3+\sin x\right)=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \sin x+\cos x=3\ \text{(VN)}\end{array}\right.\Leftrightarrow x=k\pi,k\in\mathbb{Z}$

Vậy nghiệm của phương trình là $x=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Ví dụ 4. Giải phương trình: $2\sin 2x-\cos 2x=7\sin x+2\cos x-4$.

Định hướng: Chuyển toàn bộ vế phải của phương trình sang vế trái, nhóm $2\sin 2x-2\cos x=2\cos x\left(2\sin x-1\right)$, sử dụng công thức $\cos 2x=1-2\sin^2 x$ để nhóm $2\sin^2 x-1-7\sin x+4=2\sin^2 x-7\sin x+3=\left(\sin x-3\right)\left(2\sin x-1\right)$

Chú ý rằng: nếu $f\left(x\right)=ax^2+bx+c=a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)$ với x_1,x_2 là nghiệm của phương trình $f\left(x\right)=0$

Giải

Ta có:

$\text{PT}\Leftrightarrow 4\sin x.\cos x-2\cos x+2\sin^2 x-1-7\sin x+4=0$

$\Leftrightarrow 2\cos x\left(2\sin x-1\right)+2\sin^2 x-7\sin x+3=0$

$\Leftrightarrow 2\cos x\left(2\sin x-1\right)+\left(\sin x-3\right)\left(2\sin x-1\right)=0$

$\Leftrightarrow\left(2\sin x-1\right)\left(\sin x+2\cos x-3\right)=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=\frac{1}{2}\\ \sin x+2\cos x-3=0\ \ (\text{VN vì } 1^2+2^2<3^2)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.\quad(k\in\mathbb{Z})$

Vậy nghiệm của phương trinh là: $x=\frac{\pi}{6}+k2\pi,\ x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi,\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Ví dụ 5. Giải phương trình: $\sin x\left(2\sin x+1\right)=\cos x\left(2\cos x+\sqrt{3}\right)$.

Định hướng: Khai triển cả hai vế phương trình ta thấy vế trái xuất hiện $2\sin^2 x$ và vế phải xuất hiện $2\cos^2 x$, như vậy nếu đặt 2 ra ngoài ta se được công thức nhân hai: $2\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)=2\cos 2x$. Chuyển vế, phương trình đã cho trở thành:

$\sin x-\sqrt{3}\cos x=2\cos 2x$.

Giải

Ta có:

PT $\Leftrightarrow \sin x-\sqrt{3}\cos x=2\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)\Leftrightarrow \sin x-\sqrt{3}\cos x=2\cos 2x$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=\cos 2x \Leftrightarrow \sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}-2x+k2\pi \\ x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+2x+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{5\pi}{18}+k\frac{2\pi}{3} \\ x=-\frac{5\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right. \quad (k\in\mathbb{Z})$$

Vậy phương trình có nghiệm là: $x=\frac{5\pi}{18}+k\frac{2\pi}{3};\ x=-\frac{5\pi}{6}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Ví dụ 6. Giải phương trình : $\cos 7x\cos 5x-\sqrt{3}\sin 2x=1-\sin 7x\sin 5x\,(*)$

Định hướng : Ở cả hai vế phương trình đều xuất hiện $7x, 5x$. Chuyển vế ta được :

$\cos 7x\cos 5x+\sin 7x\sin 5x=\cos(7x-5x)=\cos 2x$

Giải

Ta có :

$(*)\Leftrightarrow \cos 7x\cos 5x+\sin 7x\sin 5x-\sqrt{3}\sin 2x=1$

$\Leftrightarrow \cos(7x-5x)-\sqrt{3}\sin 2x=1\Leftrightarrow \cos 2x-\sqrt{3}\sin 2x=1\,(1)$

Chia hai vế của phương trình (1) cho $\sqrt{1^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2}=2$

Ta được: $\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{3}\cos 2x-\sin\frac{\pi}{3}\sin 2x=\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \cos\left(2x\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=k\pi \\ x=-\frac{\pi}{3}+k\pi \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của phương trình (*) là $x=k\pi, x=-\frac{\pi}{3}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$

Ví dụ 7. Xác định m để phương trình $\sqrt{2}\sin x+m\cos x=m-\sqrt{2}\,(*)$ có nghiệm.

Định hướng : Phương trình $a\sin x+b\cos x=c$ có nghiệm khi $a^2+b^2\ge c^2$.

Giải

Ta có :

(*) có nghiệm $\Leftrightarrow \sqrt{2}^2+m^2\ge\left(m-\sqrt{2}\right)^2\Leftrightarrow 2+m^2\ge m^2-2\sqrt{2}m+2\Leftrightarrow m\ge 0$

Vậy $m\ge 0$ thì phương trình đã cho có nghiệm.

Ví dụ 8. Giải và biện luận các phương trình sau theo tham số m

a) $\sin x+m\cos x=1-m \qquad (1)$

b) $(2m+1)\sin x+(2m-1)\cos x=2m^2+\frac{3}{2} \qquad (2)$

Giải

a) **Cách 1.** Thay $\frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$ hay $x=\pi+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$ vào (1). Ta có :

$VT(1)=0-m=-m$, nên (1) không có nghiệm $x=\pi+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$

Đặt $t=\tan\frac{x}{2}$. Ta có (1) trở thành: $\frac{2t}{1+t^2}+m\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)=1-m$

$\Leftrightarrow 2t+m-mt^2=1+t^2-m-mt^2 \Leftrightarrow t^2-2t+1-2m=0(*)$

$\Delta'=1-(1-2m)=2m$

- Nếu $m<0$ thì $\Delta'<0\Rightarrow(*)$ vô nghiệm $\Rightarrow(1)$ vô nghiệm
- Nếu $m=0$ thì $\Delta'=0\Rightarrow(*)$ có nghiệm kép $t_1=t_2=-\frac{b'}{a}=1$

  $\Rightarrow(1)$ có nghiệm $\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}+k\pi$ hay $x=\frac{\pi}{2}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$
- Nếu $m>0$ thì $\Delta'>0\Rightarrow(*)$ có nghiệm $t=1-\sqrt{2m}$ hoặc $t=1+\sqrt{2m}$

  $\Rightarrow(1)$ có nghiệm là $x=2\arctan\left(1\pm\sqrt{2m}\right)+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$

Tóm lại :

Nếu $m<0$ thì (1) vô nghiệm

Nếu $m=0$ thì có nghiệm $x=\frac{\pi}{2}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$

Nếu $m>0$ thì (1) có nghiệm là $x=2\arctan\left(1+\sqrt{2m}\right)+k2\pi, x=2\arctan\left(1-\sqrt{2m}\right)+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$

Cách 2

(1) có dạng $a\sin X+b\cos X=c$ với $a=1, b=m, c=1, X=x$

Ta có :

$A=a^2+b^2-c^2=1^1+m^2-(1-m)^2=2m$

Nếu $m<0$ thì $A<0\Rightarrow a^2+b^2<c^2\Rightarrow$ (1) vô nghiệm

Nếu $m=0:(1)\Leftrightarrow \sin x=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k2\pi.k\in\mathbb{Z}$

Nếu $m>0$ thì $A>0\Rightarrow a^2+b^2>c^2\Rightarrow(1)$ có nghiệm

Chia hai vế của phương trình (1) cho $\sqrt{m^2+1}$

Ta được: $\frac{1}{\sqrt{m^2+1}}\sin x+\frac{m}{\sqrt{m^2+1}}\cos x=\frac{1-m}{\sqrt{m^2+1}}(*)$

Đặt $\frac{m}{\sqrt{m^2+1}}=\cos\varphi, \frac{1}{\sqrt{m^2+1}}=\sin\varphi, \frac{1-m}{\sqrt{m^2+1}}=\cos\alpha.$

$(*)\Leftrightarrow\cos(x-\varphi)=\cos\alpha\Leftrightarrow x=\varphi+\alpha+k2\pi$ hoặc $x=\varphi-\alpha+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$

b) (1) có dạng $a\sin X+b\cos X=c$ với $a=2m, b=2m-1, c=2m^2+\frac{3}{2}, X=x$. Ta có

$a^2+b^2=(2m+1)^2+(2m-1)^2=8m^2+2$

$c^2=\left(2m^2+\frac{3}{2}\right)^2=4m^4+6m^2+\frac{9}{4}$

(2) có nghiệm $\Leftrightarrow a^2+b^2\ge c^2\Leftrightarrow 4m^4-2m^2+\frac{1}{4}\le 0\Leftrightarrow\left(2m^2-\frac{1}{2}\right)^2\le 0$

$\Leftrightarrow 2m^2 - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow m^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow m \pm \frac{1}{2}$

Với $m = \frac{1}{2} : (2) \Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Với $m = -\frac{1}{2} : (2) \Leftrightarrow \cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi.k \in \mathbb{Z}$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BT 1. Giải phương trình: $2\cos^2 \frac{x}{2} + \sqrt{3}\sin x = 1 + 2\sin 3x$.

Giải

Ta có:

$$PT \Leftrightarrow \cos x + \sqrt{3}\sin x = 2\sin 3x \Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = \sin 3x \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin 3x$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x = x + \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 3x = \frac{5\pi}{6} - x + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{5\pi}{24} + k\frac{\pi}{2} \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = \frac{\pi}{12} + k\pi,\ x = \frac{5\pi}{24} + k\frac{\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z})$.

BT 3. Giải phương trình: $\dfrac{\sin x - 2\sqrt{3}\cos^2 \frac{x}{2} + \sqrt{3}}{2\sin x + \sqrt{3}} = 0$.

Giải

Điều kiện: $\sin x \neq -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$PT \Leftrightarrow \sin x - \sqrt{3}\cos x = 0 \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Kết hợp điều kiện ta có $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ là nghiệm của phương trình.

BT 4. Giải phương trình: $\sin x\left(\sqrt{3} - \sin x\right) - \cos x\left(1 + \cos x\right) = 0$.

Giải

$$PT \Leftrightarrow \sqrt{3}\sin x - \cos x = \sin^2 x + \cos^2 x \Leftrightarrow \sqrt{3}\sin x - \cos x = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \pi + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, x = \pi + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$

BT 5. Giải phương trình: $2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin 2x - 2 = 0$.

Giải

$2\sin^2 x+\sqrt{3}\sin 2x-2=0 \Leftrightarrow 2\frac{1-\cos 2x}{2}+\sqrt{3}\sin 2x-2=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x=1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\cos 2x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}+k2\pi \\ 2x-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{6}+k\pi \\ x=\frac{\pi}{2}+k\pi \end{array}\right. \quad (k\in\mathbb{Z})$

Vậy nghiệm của phương trình là $x=\frac{\pi}{6}+k\pi, x=\frac{\pi}{2}+k\pi, (k\in\mathbb{Z})$

BT 6. Giải phương trình $2\sin 6x-2\sin 4x+\sqrt{3}\cos 2x=\sqrt{3}+\sin 2x$.

Giải

PT $\Leftrightarrow 2\cos 5x.\sin x=\sqrt{3}\sin^2 x+\sin x.\cos x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x=0 \\ 2\cos 5x=\sqrt{3}\sin x+\cos x \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=k\pi \\ \cos 5x=\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=k\pi \\ x=-\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2} \\ x=\frac{\pi}{18}+\frac{k\pi}{3} \end{array}\right.$

Vậy phương trình có các nghiệm $x=k\pi;\ x=-\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2};\ x=\frac{\pi}{18}+\frac{k\pi}{3} \quad (k\in\mathbb{Z})$

BT 7. Giải phương trình: $\cos 2x+2\sin x=1+\sqrt{3}\sin 2x$.

Giải

PT $\Leftrightarrow 2\sin x=2\sin^2 x+2\sqrt{3}\sin x.\cos x \Leftrightarrow \sin x\left(\sqrt{3}\cos x+\sin x-1\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x=0 \\ \sqrt{3}\cos x+\sin x-1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=k\pi \\ \sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=\frac{1}{2} \end{array}\right.$

• $\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{3}+x=\frac{\pi}{6}+k2\pi \\ \frac{\pi}{3}+x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi \\ x=\frac{\pi}{2}+k2\pi \end{array}\right.$

Vậy phương trình có nghiệm là $x=k\pi;\ x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi;\ x=\frac{\pi}{2}+k2\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$.

BT 8. Giải phương trình: $\sin 2x-\cos x+\sin x=1 \ (x\in\mathbb{R})$.

Giải

$\sin 2x-\cos x+\sin x=1 \Leftrightarrow (\sin x-\cos x)(1-\sin x+\cos x)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x-\cos x=0\\ 1-\sin x+\cos x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4}+k\pi\\ x=\frac{\pi}{2}+k2\pi (k\in\mathbb{Z})\\ x=\pi+k2\pi\end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x=\frac{\pi}{4}+k\pi, x=\frac{\pi}{2}+k2\pi, x=\pi+k2\pi, (k\in\mathbb{Z})$.

BT 9. Giải phương trình: $\sin 2x+2\sin x+1=\cos 2x$.

Giải

$\sin 2x+2\sin x+1=\cos 2x \Leftrightarrow \sin 2x+2\sin x+1-\cos 2x=0$

$\Leftrightarrow 2\sin x.\cos x+2\sin x+2\sin^2 x=0$

$\Leftrightarrow 2\sin x\left(\cos x+\sin x+1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \sin x+\cos x=-1\end{array}\right.$

• $\sin x=0 \Leftrightarrow x=k\pi$

• $\sin x+\cos x=-1 \Leftrightarrow \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pi+k2\pi\\ x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right.$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi;\ x=k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$

BT 10. Giải phương trình: $9\sin x+6\cos x-3\sin 2x+\cos 2x=8$.

Hướng dẫn giải

pt $\Leftrightarrow 9\sin x+6\cos x-6\sin x\cos x+1-2\sin^2 x=8$

$\Leftrightarrow 6\cos x-6\sin x\cos x-2\sin^2 x+9\sin x-7=0$

$\Leftrightarrow 6\cos x\left(1-\sin x\right)-2\left(\sin x-1\right)\left(\sin x-\frac{7}{2}\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}1-\sin x=0\\ 6\cos x+2\sin x=7 (vn)\end{array}\right. \Leftrightarrow \sin x=1 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}.$

BT 11. Tìm m để phương trình $\left(m+2\right)\sin x+m\cos x=2$ vô nghiệm

Hướng dẫn giải

Phương trình đã cho vô nghiệm $\Leftrightarrow \left(m+2\right)^2+m^2<2^2 \Leftrightarrow -2<m<0.$

Dạng 3. Phương trình thuần nhất bậc hai đối với sinx và cosx

$$a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = d$$

Phương pháp

Cách 1:

- Kiểm tra cosx = 0 có thoả mãn hay không?

  Lưu ý: cosx = 0 $\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow \sin^2 x = 1 \Leftrightarrow \sin x = \pm 1.$

- Khi $\cos x \neq 0$, chia hai vế phương trình (1) cho $\cos^2 x \neq 0$ ta được:

  $$a.\tan^2 x + b.\tan x + c = d(1 + \tan^2 x)$$

- Đặt: t = tanx, đưa về phương trình bậc hai theo t:

  $$(a-d)t^2 + b.t + c - d = 0$$

Cách 2: Dùng công thức hạ bậc

$$(1) \Leftrightarrow a.\frac{1-\cos 2x}{2} + b.\frac{\sin 2x}{2} + c.\frac{1+\cos 2x}{2} = d$$

$$\Leftrightarrow b.\sin 2x + (c-a).\cos 2x = 2d - a - c$$

(đây là phương trình bậc nhất đối với sin2x và cos2x)

CÁC VÍ DỤ RÈN LUYỆN KĨ NĂNG

Ví dụ 1. Giải phương trình $\sin^2 x + 3\sin x\cos x - 4\cos^2 x = 0(*)$.

Giải

Khi $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin^2 x = 1 \end{cases}$

Ta có $VT(*) = 1 \neq VP \Rightarrow (*)$ không có nghiệm trên $\Rightarrow \cos^2 x \neq 0$

Chia hai vế của (*) cho $\cos^2 x$, ta được: $\tan^2 x + 3\tan x - 4 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = 1 = \tan\frac{\pi}{4} \\ \tan x = -4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \arctan(-4) + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$

Vậy nghiệm của (*) là $x = \frac{\pi}{4} + k\pi; x = \arctan(-4) + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Ví dụ 2. Giải phương trình $2\sin^2 x + 3\sqrt{3}\sin x\cos x - \cos^2 x = 2(*)$

Giải

Khi $x=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos x=0\\ \sin^2 x=1\end{cases}$

Ta có: $VT(*)=2=VP(*)\Rightarrow(*)$ có nghiệm $x=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$

Khi $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}:\cos^2 x\neq 0$, chia hai vế của (*) cho $\cos^2 x$

$\Leftrightarrow\tan x=\frac{1}{\sqrt{3}}=\tan\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$

Vậy nghiệm của phương trình (*) là $x=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z};x=\frac{\pi}{6}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$.

Ví dụ 3. Giải phương trình $\cos^3 x+2\sin x\cos^2 x-3\sin^3 x=0(*)$.

Giải

Khi $x=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos x=0\\ \sin^2 x=1\end{cases}$

Ta có: $VT(*)=\pm3\neq VP(*)$ không có nghiệm $x=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\Rightarrow\cos^3 x\neq0$

Chia hai vế của (*) cho $\cos^3 x$, ta được:

$1+2\tan x-3\tan^3 x=0\Leftrightarrow(\tan x-1)\underbrace{\left(3\tan^2 x+3\tan x+1\right)}_{\Delta<0}=0$

$\Leftrightarrow\tan x=1=\tan\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$

Vậy nghiệm của phương trình (*) là $x=\frac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$

Ví dụ 4. Giải phương trình $\cos^3 x+\sin x-3\sin^2 x\cos x=0(*)$.

Giải

Khi $x=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos x=0\\ \sin^2 x=1\end{cases}$

Ta có: $VT(*)=\pm1\neq VP\Rightarrow(*)$ không có nghiệm trên $\Rightarrow\cos^3 x\neq0$

Chia hai vế của (*) cho $\cos^3 x$, ta được $1+\tan x\left(1+\tan^2 x\right)-3\tan^2 x=0$

$\Leftrightarrow\tan^3 x-2\tan^2 x+\tan+1=0\Leftrightarrow(\tan x-1)\left(\tan^2 x-2\tan x-1\right)=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\tan x-1=0\\ \tan^2 x-2\tan x-1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\tan x=1\\ \tan x=1\pm\sqrt{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4}\\ x=\arctan\left(1\pm\sqrt{2}\right)+k\pi\end{array}\right.$

Vậy nghiệm của (*) là $x=\frac{\pi}{4};x=\arctan\left(1\pm\sqrt{2}\right)+k\pi,k\in\mathbb{Z}$

Ví dụ 5. Xác định a để $a\sin^2 x+2\sin2x+3a\cos^2 x=2(*)$ có nghiệm.

Giải

$(*) \Leftrightarrow a\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)+2\sin 2x+3a\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)=2$

$\Leftrightarrow 2\sin 2x+a\cos 2x=2-2a(1)$

(*) có nghiệm $\Leftrightarrow (1)$ có nghiệm $\Leftrightarrow 2^2+a^2\ge(2-2a)^2$

$\Leftrightarrow 4+a^2\ge 4-8a+4a^2 \Leftrightarrow 3a^2-8a\le 0 \Leftrightarrow 0\le a\le\frac{8}{3}$

Vậy với $0\le a\le\frac{8}{3}$ thì phương trình đã cho có nhiệm.

Ví dụ 6. Cho phương trình:

$$\sin^3 x+(2m+1)\sin^2 x\cos x+(3m-1)\sin x\cos^3 x=0(*).$$

Xác định m để phương trình có ba nghiệm phân biệt $x\in\left(-\frac{\pi}{2};0\right]$.

Giải

Khi $x=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases}\cos x=0\\ \sin^2 x=1\end{cases}$

Ta có: $VT(*)=\pm1\ne VP \Rightarrow (*)$ không có nghiệm trên $\Rightarrow \cos^3 x\ne 0$

Chia hai vế của (*) cho $\cos^3 x$, ta được:

$\tan^3 x+(2m+1)\tan^2 x+(3m-1)\tan x+m-1=0$

Đặt $t=\tan x$. với $x\in\left(-\frac{\pi}{2};0\right] \Rightarrow t\in(-\infty;0]$

Ta có: $t^3+(2m+1)t^2+(3m-1)t+m-1=0$

$\Leftrightarrow (t+1)\left(t^2+2mt+m-1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=-1\\ f(t)=t^2+2mt+m-1=0(1)\end{array}\right.$

Để (*) có ba nghiệm phân biệt $x\in\left(-\frac{\pi}{2};0\right]$ khi và chỉ khi (1) có hai nghiệm phân biệt

$t_1,t_2:\begin{cases}t_1<t_2\le 0\\ t_1,t_2\ne -1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'>0\\ P\ge 0\\ S<0\\ f(-1)\ne 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m^2-m+1>0,\forall m\\ m-1\ge 0\\ -m<0\\ 1-2m+m-1\ne 0\end{cases} \Leftrightarrow m\ge 1$

Vậy $m\ge 1$ thỏa mãn đề bài.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BT 1. Giải phương trình: $4\cos x-2\cos 2x-\cos 4x=1$.

Hướng dẫn giải

pt $\Leftrightarrow \cos^2 x - \sqrt{3}\sin 2x = 1 + \sin^2 x$

$\cos x = 0$ không là nghiệm nên chia 2 vế pt cho $\cos^2 x$ ta được:

$1 - \sqrt{3}\tan x = 1 + \tan^2 x \Leftrightarrow \tan^2 x + \sqrt{3}\tan x = 0 \Leftrightarrow \tan x\left(\tan x + \sqrt{3}\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = 0 \\ \tan x + \sqrt{3} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{3} + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

BT 2. Giải phương trình: $\cos^3 x - 4\sin^3 x - 3\cos x \sin^2 x + \sin x = 0.$

Hướng dẫn giải

vì $\cos x = 0$ không là nghiệm của phương trình nên chia 2 vế pt cho $\cos^3 x$

$1 - 4\tan^3 x - 3\tan^2 x + \tan x\left(1 + \tan^2 x\right) = 0$

$\Leftrightarrow -3\tan^3 x - 3\tan^2 x + \tan x + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ \tan x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ \tan x = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right.$$

BT 3. Giải phương trình: $3\cos^4 x - 4\sin^2 x\cos^2 x + \sin^4 x = 0.$

Hướng dẫn giải

$\cos x = 0$ không là nghiệm của phương trình nên chia 2 vế phương trình cho $\cos^4 x$ ta được:

$$3 - 4\tan^2 x + \tan^4 x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan^2 x = 3 \\ \tan^2 x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi \\ x = \pm\dfrac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$

BT 4. Giải phương trình: $\sin 2x + 2\tan x = 3.$

Hướng dẫn giải

Chia 2 vế phương trình cho $\cos^2 x \neq 0$ ta được:

$\dfrac{2\sin x\cos x}{\cos^2 x} + \dfrac{2\tan x}{\cos^2 x} = \dfrac{3}{\cos^2 x} \Leftrightarrow 2\tan x + 2\tan x\left(1 + \tan^2 x\right) = 3\left(1 + \tan^2 x\right)$

$\Leftrightarrow 2\tan x + 2\tan x + 2\tan^3 x - 3 - 3\tan^2 x = 0$

$\Leftrightarrow 2\tan^3 x - 3\tan^2 x + 4\tan x - 3 = 0 \Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

BT 5. Giải phương trình: $\sin x - 4\sin^3 x + \cos x = 0.$

Hướng dẫn giải

$\cos x = 0$ không là nghiệm của phương trình, chia 2 vế của pt cho $\cos^3 x$ ta được:

$\tan x\left(1+\tan^2 x\right)-4\tan^3 x+1+\tan^2 x=0$

$\Leftrightarrow \tan x+\tan^3 x-4\tan^3 x+1+\tan^2 x=0$

$\Leftrightarrow -3\tan^3 x+\tan^2 x+\tan x+1=0 \Leftrightarrow \tan x=1 \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$

BT 6. Giải phương trình: $\tan x.\sin^2 x-2\sin^2 x=3\left(\cos 2x+\sin x\cos x\right)$

Hướng dẫn giải

Điều kiện : $\cos x \neq 0$.

Chia 2 vế phương trình cho $\cos^2 x$ ta được:

$\tan^3 x-2\tan^2 x=\dfrac{3\left(\cos^2 x-\sin^2 x+\sin x\cos x\right)}{\cos^2 x}$

$\Leftrightarrow \tan^3 x-2\tan^2 x=3\left(1-\tan^2 x+\tan x\right)$

$\Leftrightarrow \tan^3 x-2\tan^2 x=3-3\tan^2 x+3\tan x$

$\Leftrightarrow \tan^3 x+\tan^2 x-3\tan x-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x=\sqrt{3}\\ \tan x=-\sqrt{3}\\ \tan x=-1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k\pi\\ x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$

BT 7. Cho phương trình : $\sin^2 x-m\sin 2x-(m+1)\cos^2 x=0(*)$. Xác định m để phương trình có nghiệm.

Hướng dẫn giải

$(*)\Leftrightarrow \dfrac{1-\cos 2x}{2}-m\sin 2x-\dfrac{(m+1)(1+\cos 2x)}{2}=0$

$\Leftrightarrow 2m\sin 2x+(m+2)\cos 2x=-m$

(*) có nghiệm $\Leftrightarrow (2m)^2+(m+2)^2\geq(-m)^2 \Leftrightarrow \left(m+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}\geq 0, \forall m$

Vậy phương trình đã cho luôn có nghiệm với mọi m.

Dạng 4. Phương trình đối xứng

Phương pháp

Bài toán 1: a.(sinx ± cosx) + b.sinx.cosx + c = 0

- Đặt: $t=\cos x\pm\sin x=\sqrt{2}.\cos\left(x\mp\frac{\pi}{4}\right);\ |t|\le\sqrt{2}.$

$\Rightarrow t^2=1\pm 2\sin x.\cos x\ \Rightarrow\ \sin x.\cos x=\pm\frac{1}{2}(t^2-1).$

- Thay vào phương trình đã cho, ta được phương trình bậc hai theo t. Giải phương trình này tìm t thỏa $|t|\le\sqrt{2}.$ Suy ra x.

Lưu ý dấu

- $\cos x+\sin x=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$
- $\cos x-\sin x=\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

Bài toán 2: a.| sinx ± cosx | + b.sinx.cosx + c = 0

- Đặt: $t=|\cos x\pm\sin x|=\sqrt{2}.\left|\cos\left(x\mp\frac{\pi}{4}\right)\right|;\ Đk: 0\le t\le\sqrt{2}.$

$\Rightarrow\ \sin x.\cos x=\pm\frac{1}{2}(t^2-1).$

- Tương tự dạng trên. Khi tìm x cần lưu ý phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối.

CÁC VÍ DỤ RÈN LUYỆN KĨ NĂNG

Ví dụ 1. Giải các phương trình

a) $\sin x+\cos x+2\sin x\cos x-1=0\ (1)$

b) $6(\sin x-\cos x)-\sin x\cos x-6=0(2)$

Giải

a) Đặt $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\left(x+\frac{\pi}{4}\right),|t|\le\sqrt{2}$

Phương trình (1) trở thành: $t+2\left(\frac{t^2-1}{2}\right)-1=0\Leftrightarrow t^2+t-2=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-2<-\sqrt{2} \end{array}\right. \Rightarrow \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1=\frac{1}{\sqrt{2}}=\sin\frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+k2\pi \\ x+\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=k2\pi \\ x=\frac{\pi}{2}+k2\pi \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$$

Vậy nghiệm của phương trình (1) là $x=k2\pi; x=\frac{\pi}{2}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.

b) Đặt $t=\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right), |t|\le\sqrt{2}$

Phương trình (2) trở thành: $6t-\left(\frac{1-t^2}{2}\right)-6=0\Leftrightarrow t^2+12t-13=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-13<-\sqrt{2} \end{array}\right. \Rightarrow \sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}=\sin\frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+k2\pi \\ x-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2}+k2\pi \\ x=\pi+k2\pi \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$$

Vậy nghiệm của phương trình (2) là $x=\frac{\pi}{2}+k2\pi; x=\pi+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Ví dụ 2. Giải phương trình: $\sin 2x-2\sqrt{2}\left(\sin x+\cos x\right)=5$.

Giải

Đặt $\sin x+\cos x=t \quad \left(|t|\le\sqrt{2}\right) \quad \Rightarrow \sin 2x=t^2-1$.

$PT\Leftrightarrow t^2-2\sqrt{2}t-6=0\Leftrightarrow t=-\sqrt{2}$ (thỏa mãn)

Giải phương trình

$\sin x+\cos x=-\sqrt{2}\Leftrightarrow \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-1\Leftrightarrow x=\frac{5\pi}{4}+k2\pi \quad \left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x=\frac{5\pi}{4}+k2\pi \quad \left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Ví dụ 3. Giải phương trình $\sin^3x+\cos^3x=2\left(\sin x+\cos x\right)-1\left(*\right)$

Định hướng: Ta sử dụng hằng đẳng thức

$$\sin^3x+\cos^3x=\left(\sin x+\cos x\right)\left(1-\sin x\cos x\right)$$

Giải

Ta có:

$\left(*\right)\Leftrightarrow\left(\sin x+\cos x\right)\left(1-\sin x\cos x\right)=2\left(\sin x+\cos x\right)-1\left(1\right)$

Đặt $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right),|t|\le\sqrt{2}$

Phương trình (1) trở thành: $t\left(1-\frac{t^2-1}{2}\right)=2t-1$

$\Leftrightarrow t\left(3-t^2\right)=4t-2\Leftrightarrow t^3+t-2=0$

$\Leftrightarrow (t-1)\left(t^2+t+2\right)=0\Leftrightarrow t=1\left(\text{do } t^2+t+2>0,\forall t\in\mathbb{R}\right)$

$\Rightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}=\sin\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=k2\pi\\ x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x=k2\pi;x=\frac{\pi}{2}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}$.

Ví dụ 4. Giải phương trình: $\cos 3x+3\cos x+4\cos^2 x+8\sin x-8=0$.

Định hướng: Ta sử dụng công thức nhân 3 cho cos3x để triệt tiêu phần 3cosx phía liền kề sau đó. Như vậy, phương trình viết thành: $4\cos^3 x+4\cos^2 x+8\sin x-8=0$, nhóm các cụm $4\cos^3 x+4\cos^2 x=4\cos^2 x\left(\cos x+1\right)$, $8\sin x-8=-8\left(1-\sin x\right)$. Sử dụng hằng đẳng thức $\cos^2 x=1-\sin^2 x=\left(1-\sin x\right)\left(1+\sin x\right)$. Đưa phương trình đã cho về phương trình tích với nhân tử chung là $1-\sin x$.

Giải

Ta có:

$PT\Leftrightarrow 4\cos^3 x-3\cos x+3\cos x+4\cos^2 x+8\sin x-8=0$

$\Leftrightarrow \cos^2 x\left(\cos x+1\right)=2\left(1-\sin x\right)$

$\Leftrightarrow \left(1-\sin x\right)\left(1+\sin x\right)\left(\cos x+1\right)=2\left(1-\sin x\right)$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=1\\ \left(1+\sin x\right)\left(\cos x+1\right)=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\\ \sin x+\cos x+\sin x.\cos x=1\left(*\right)\end{array}\right.$

Đặt $\sin x+\cos x=t\ \left(|t|\le\sqrt{2}\right)\Rightarrow \sin x.\cos x=\frac{t^2-1}{2}$.

$\left(*\right)$ trở thành $t+\frac{t^2-1}{2}=1\Leftrightarrow t^2+2t-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\ t=-3\ (\text{loại})\end{array}\right.$

$t=1\Rightarrow \sin 2x=0\Leftrightarrow x=\frac{k\pi}{2}$.

Vậy phương trình đã cho có một họ nghiệm là: $x=\frac{k\pi}{2}\ \ (k\in\mathbb{Z})$.

Ví dụ 5. Giải phương trình : $2\cos^3 x+\sin x+1=2\sin^2 x\left(*\right)$

Định hướng : Biến đổi $\sin^2 x=1-\cos^2 x$, chuyển vế phương trình ta được $2\cos^3 x+2\cos^2 x+\sin x-1=0$, đến đây hoàn toàn tương tự ví dụ 4.

Giải

Ta có :

$(*) \Leftrightarrow 2\cos^3 x - 2(1-\cos^2 x) + \sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow 2\cos^3 x + 2\cos^2 x + \sin x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 x(\cos x + 1) - (1-\sin x) = 0$

$\Leftrightarrow 2(1-\sin x)(1+\sin x)(\cos x + 1) - (1-\sin x) = 0$

$\Leftrightarrow (1-\sin x)\left[2(1+\sin x)(\cos x + 1) - 1\right] = 0$

$\Leftrightarrow (1-\sin x)\left[2(\sin x + \cos x) + 2\sin x\cos x + 1\right] = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 1-\sin x = 0 & (1) \\ 2(\sin x + \cos x) + 2\sin x\cos x + 1 = 0 & (2) \end{array}\right.$$

Ta có : $(1) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Giải (2), ta đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right), |t| \le \sqrt{2}$

(2) trở thành : $2t + (t^2 - 1) + 1 = 0 \Leftrightarrow t(t+2) = 0 \Rightarrow t = 0$

$\Rightarrow \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Vậy nghiệm của phương trình (*) là $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Ví dụ 6. Cho $\sin 2x - (2m + \sqrt{2})(\sin x + \cos x) + 2m\sqrt{2} + 1 = 0 (*)$. Xác định m để phương trình (*) có đúng hai nghiệm $x \in \left(0; \frac{5\pi}{4}\right)$

Giải

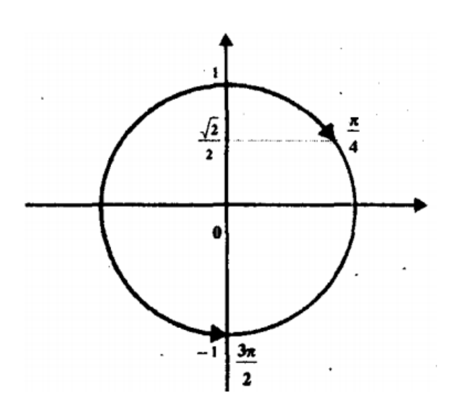
Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

Với $0 < x < \frac{5\pi}{4} \Rightarrow \frac{\pi}{4} < x + \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{2}$

Phương trình (*) trở thành

$t^2 - 1 - (2m + \sqrt{2})t + 2m\sqrt{2} + 1 = 0$

$\Leftrightarrow t^2 - (2m + \sqrt{2})t + 2m\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow t = \sqrt{2}$ hoặc $t = 2m$



Với

$t = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Mà $0 < x < \frac{5\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} 0 < \frac{\pi}{4} + k2\pi < \frac{5\pi}{4} \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{8} < k < \frac{1}{2} \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow k = 0$

Do đó $x = \frac{\pi}{4}$ là một nghiệm của (*)

Để (*) có đúng hai nghiệm $x \in \left(0; \frac{5\pi}{4}\right)$ khi $-1 < \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \le \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow -\sqrt{2} < 2m \le 1 \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} < m \le \frac{1}{2}$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BT 1. Giải phương trình: $\sin x + \sin^2 x + \cos^3 x = 0.$

Hướng dẫn giải

$pt \Leftrightarrow \sin x(1+\sin x) + \cos x(1-\sin^2 x) = 0$

$\Leftrightarrow (1+\sin x)[\sin x + \cos x(1-\sin x)] = 0$

$\Leftrightarrow (1+\sin x)(\sin x + \cos x - \sin x\cos x) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x + 1 = 0 \quad (1) \\ \sin x + \cos x - \sin x\cos x = 0 \ (2) \end{array}\right.$

Giải (1): $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Giải (2): Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right), |t| \le \sqrt{2}$

$(2) \Leftrightarrow t - \frac{t^2-1}{2} = 0 \Leftrightarrow 2t - t^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 2t - 1 = 0$

Lúc đó: $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1+\sqrt{2} \\ t = 1-\sqrt{2} \end{array}\right. \Rightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1-\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + \arcsin\frac{1-\sqrt{2}}{2} + k2\pi \\ x = \frac{3\pi}{4} - \arcsin\frac{1-\sqrt{2}}{2} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$

BT 2. Giải phương trình: $\sqrt{2}(\sin x + \cos x) = \tan x + \cot x.$

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $\sin 2x \ne 0$

$pt \Leftrightarrow \sqrt{2}(\sin x + \cos x) = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}(\sin x + \cos x) = \frac{1}{\sin x.\cos x}$

Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right), |t| \le \sqrt{2}$

Phương trình đã cho trở thành

$\sqrt{2}t = \frac{1}{\frac{t^2-1}{2}} \Leftrightarrow \sqrt{2}t(t^2-1) = 2 \Leftrightarrow t^3 - t - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow t = \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

BT 3. Giải phương trình: $2\sin^3 x - \sin x = 2\cos^3 x - \cos x + \cos 2x.$

Hướng dẫn giải

$\text{pt} \Leftrightarrow 2\left(\sin^3 x - \cos^3 x\right) - \left(\sin x - \cos x\right) + \sin^2 x - \cos^2 x = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x - \cos x = 0 \\ 2\left(1 + \sin x \cos x\right) - 1 + \left(\sin x + \cos x\right) = 0 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \tan x = 1 & (1) \\ \sin x + \cos x + 2\sin x \cos x + 1 = 0 & (2) \end{array}\right.$

Giải (1): $\tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Giải (2): Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right), |t| \le 1$

Phương trình (2) trở thành:

$$t + t^2 - 1 + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = -1 \\ \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{-\sqrt{2}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x = \pi + k2\pi \end{array}\right.$$

BT 4. Giải phương trình: $2\cos^3 x + 2\cos^2 x - 1 + \sin x = 0.$

Hướng dẫn giải

$2\cos^3 x + 2\cos^2 x - 1 + \sin x = 0$

$\text{pt} \Leftrightarrow 2\cos^2 x\left(1 + \cos x\right) - 1 + \sin x = 0$

$\Leftrightarrow 2\left(1 - \sin x\right)\left(1 + \sin x\right)\left(1 + \cos x\right) - 1 + \sin x = 0$

$\Leftrightarrow \left(1 - \sin x\right)\left[2\left(1 + \sin x\right)\left(1 + \cos x\right) - 1\right] = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \sin x = 1 & (1) \\ 2\left(\sin x + \cos x\right) + 2\sin x \cos x + 1 = 0 & (2) \end{array}\right.$

Giải (1): $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Giải (2): Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right), |t| \le 1$

Phương trình (2) trở thành: $2t + t^2 - 1 + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

BT 5. Cho phương trình $\sin x + \cos x = 1 + m\sin 2x\,(*)$ xác định m để (*) có nghiệm.

Giải

Đặt $t = \sin x + \cos x, |t| \le \sqrt{2}$

Phương trình đã cho trở thành: $(t - 1)\left[1 - m(t + 1)\right] = 0\,(1)$

Ta thấy (1) luôn có nghiệm $t = 1$ với mọi m, nghiệm này thỏa mãn điều kiện $|t| \le \sqrt{2}$

Vậy mọi m phương trình đã cho đều có nghiệm

BT 6. Giải và biện luận $\sin 2x + 4m\sqrt{2}\left(\sin x - \cos x\right) + 1 - 8m = 0\,(*)$

Hướng dẫn giải

Đặt $t=\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right), |t|\le\sqrt{2}$

(*) trở thành $t^2-4m\sqrt{2}t+8m-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\sqrt{2}\\t=\sqrt{2}(4m-1)\end{array}\right.$

$t=\sqrt{2}\Leftrightarrow\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1\Leftrightarrow x=\frac{3\pi}{4}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$

$t=\sqrt{2}(4m-1)$ nhận khi $\left|\sqrt{2}(4m-1)\right|\le\sqrt{2}\Leftrightarrow -1\le 4m-1\le 1\Leftrightarrow 0\le m\le\frac{1}{2}$

Tóm lại:

$\left[\begin{array}{l}m<0\\m>\frac{1}{2}\end{array}\right.$: Nghiệm của phương trình (*) là $x=\frac{3\pi}{4}+k2\pi, \in\mathbb{Z}$

$0\le m\le\frac{1}{2}$: phương trình đã cho có ba họ nghiệm

B. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Giá trị nào sau đây **không phải** là nghiệm của phương trình $2\sin x-\sqrt{3}=0$?

A. $\frac{\pi}{3}$ **B.** $\frac{2\pi}{3}$ **C.** $-\frac{9\pi}{3}$ **D.** $-\frac{10\pi}{3}$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Thử nghiệm thì thấy các phương án A, B và D đều nghiệm đúng phương trình $2\sin x-\sqrt{3}=0$. Vậy chỉ có phương án C sai.

Thật vậy, $2\sin\left(-\frac{9\pi}{3}\right)-\sqrt{3}=0\Leftrightarrow\sin 3\pi=-\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow 0=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 2. Phương trình $\cos^2x+3\cos x+2=0$:

A. có một họ nghiệm là $2k\pi, k\in\mathbb{Z}$

B. có một họ nghiệm là $(2k+1)\pi, k\in\mathbb{Z}$

C. vô nghiệm

D. có 4 họ nghiệm khác nhau

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

$\cos^2x+3\cos x+2=0\Leftrightarrow\cos x=-1\Leftrightarrow x=\pm\pi+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$ (nghiệm $\cos x=-2$ bị loại).

$\Rightarrow$ Phương trình đã cho có một họ nghiệm là $x=(2k+1)\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Câu 3. Phương trình $\cos^2x+\sin x+1=0$:

A. có một họ nghiệm là $-\frac{\pi}{2}$

B. có một họ nghiệm là $\frac{3\pi}{2}$

C. có một họ nghiệm là $-\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$

D. có một họ nghiệm là $-\frac{3\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

$$\cos^2 x+\sin x+1=0\Leftrightarrow \sin x=-1\Leftrightarrow \sin x=\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi \\ x=\pi+\frac{\pi}{2}+2k\pi \end{array}\right. \quad (k\in\mathbb{Z})$$

Câu 4. Phương trình $\cos x+\sin x=1$ có thể biến đổi về dạng

A. $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ **B.** $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ **C.** $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ **D.** $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Câu 5. Có 4 họ nghiệm được biểu diễn bởi các điểm A, B, C và D trên đường tròn đơn vị ở hình 6. Trong đó:

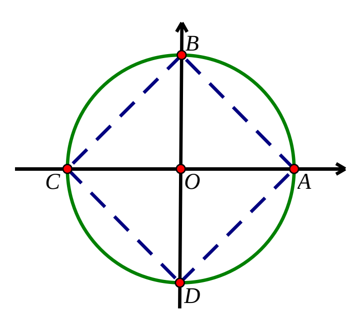
Ứng với điểm A là họ nghiệm $x=2k\pi$;

Ứng với điểm B là họ nghiệm $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$;

Ứng với điểm C là họ nghiệm $x=\pi+2k\pi$;

Ứng với điểm D là họ nghiệm $x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$.

Phương trình $\cot 3x=\cot x$ có các họ nghiệm được biểu diễn bởi các điểm



Hình 6

A. A và B **B.** C và D **C.** A và C **D.** B và D

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Các họ nghiệm được biểu diễn bởi hai điểm A và C làm cho $\sin 3x=0$ và $\sin x=0$, do đó $\cot 3$ và $\cot x$ không xác định.

Câu 6. Phương trình $\tan\frac{x}{2}=\tan x$ có nghiệm là

A. $k\pi, k\in\mathbb{Z}$ **B.** $2k\pi, k\in\mathbb{Z}$ **C.** $k\frac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$ **D.** $(2k+1)\pi, k\in\mathbb{Z}$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

$\tan\frac{x}{2}=\tan x\Leftrightarrow x=2k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Câu 7. Phương trình nào sau đây vô nghiệm?

A. $\sin x-2\cos x=3$ **B.** $3\cos x+4\sin x=-5$

C. $2\sin 2x-2\cos 2x=\sqrt{2}$ **D.** $5\sin 2x-6\cos^2 x=2$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

$\sin x-2\cos x=3\Leftrightarrow \sin(x-\alpha)=\frac{3\sqrt{5}}{5}>1$

Suy ra phương trình $\sin x-2\cos x=3$ vô nghiệm.

Câu 8. Giá trị nào sau đây là nghiệm của phương trình $\tan x+2\cot x=3$ trong khoảng $\left(180^o,270^o\right)$?

A. 225° **B.** 245° **C.** 263° **D.** 243°

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Câu 9. Giá trị $x=-\frac{21\pi}{4}$ là nghiệm của phương trình

A. $2\cos^2 x+3\sin x\cos x+\sin^2 x=0$ **B.** $2\sin^2 x+3\sin x\cos x+\cos^2 x=0$

C. $2\sin^2 x-3\sin x\cos x+\cos^2 x=0$ **D.** $2\cos^2 x-3\sin x\cos x+\sin^2 x=0$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Thay thế giá trị $x=-\frac{21\pi}{4}$ vào từng phương trình thì chỉ có phương trình B đúng.

Câu 10. Góc dương bé nhất chính xác đến phần trăm thỏa mãn phương trình $2\sin^2 x+3\sin x\cos x+\cos^2 x=0$ là

A. 225° **B.** 180° **C.** $153,43^o$ **D.** 243°

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

$2\sin^2 x+3\sin x\cos x+\cos^2 x=0\Leftrightarrow 2\tan^2 x+3\tan x+1=0$

$$\left[\begin{array}{l}\tan x=-1\\ \tan x=-\frac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-45^o+k180^o\\ x=\arctan\left(-\frac{1}{2}\right)+k\pi\end{array}\right.\left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

Câu 11. Nghiệm của phương trình $\cos x+\sin x=0$ là

A. $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ **B.** $x=\frac{\pi}{4}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ **C.** $x=-\frac{\pi}{4}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ **D.** $x=\frac{3\pi}{4}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Ta có $\cos x+\sin x=0\Leftrightarrow\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0\Leftrightarrow\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0\Leftrightarrow x+\frac{\pi}{4}=k\pi\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Câu 12. Phương trình $\sin x-\cos x=1$ có nghiệm là

A. $x=\frac{\pi}{2}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ **B.** $x=\pi+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ **C.** $\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\\ x=\pi+k2\pi\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}$ **D.** Đáp án khác

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

$\sin x-\cos x=1\Leftrightarrow\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1\Leftrightarrow\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}=\sin\frac{\pi}{4}$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+k2\pi\\ x-\frac{\pi}{4}=\pi-\frac{\pi}{4}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\\ x=\pi+k2\pi\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}$

Câu 13. Nghiệm của phương trình $\sin x-\cos x=\sqrt{2}$ là

A. $x=\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ **B.** $x=\frac{3\pi}{4}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ **C.** $x=-\frac{\pi}{4}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ **D.** $x=\frac{5\pi}{4}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Ta có: $\sin x-\cos x=\sqrt{2}\Leftrightarrow\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\Leftrightarrow\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1$

$\Leftrightarrow x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k2\pi\Leftrightarrow x=\frac{3\pi}{4}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

Câu 14. Nghiệm của phương trình $\sin 4x-\cos 4x=-\sqrt{2}$ là

A. $x=\frac{7\pi}{4}+k\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$ **B.** $x=\frac{5\pi}{16}+\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$ **C.** $x=\frac{7\pi}{16}+k\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$ **D.** $x=\frac{7\pi}{8}+k\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Ta có: $\sin 4x-\cos 4x=-\sqrt{2}\Leftrightarrow\sqrt{2}\sin\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}\Leftrightarrow\sin\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)=-1$

$\Leftrightarrow 4x-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{2}+k2\pi\Leftrightarrow 4x=\frac{7\pi}{4}+k2\pi\Leftrightarrow x=\frac{7\pi}{16}+\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}.$

Câu 15. Nghiệm của phương trình $\sin 3x+\cos 3x=\sqrt{2}$ là

A. $x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}$ B. $x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}$ C. $x=\frac{\pi}{8}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ D. $x=\frac{\pi}{12}+\frac{k2\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Ta có: $\sin 3x+\cos 3x=\sqrt{2}\Leftrightarrow\sqrt{2}\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\Leftrightarrow\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=1$

$\Leftrightarrow 3x-\frac{\pi}{4}=k2\pi\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{12}+\frac{k2\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}.$

Câu 16. Nghiệm của phương trình $\sin 2x-\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0$ là

A. $x=\frac{3\pi}{4}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ **B.** $x=\frac{\pi}{12}+\frac{k2\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}$

C. $\left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{12}+k\frac{2\pi}{3} \\ x=\frac{3\pi}{4}+k\frac{2\pi}{3} \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$

D. $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{12}+\frac{k2\pi}{3} \\ x=\frac{3\pi}{4}+k2\pi \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Ta có: $\sin 2x-\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0 \Leftrightarrow \sin 2x=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \sin 2x=\sin\left[\frac{\pi}{2}-\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]$

$\Leftrightarrow \sin 2x=\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x=\frac{\pi}{4}-x+k2\pi \\ 2x=\pi-\frac{\pi}{4}+x+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x=\frac{\pi}{4}+k2\pi \\ x=\frac{3\pi}{4}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{12}+\frac{k2\pi}{3} \\ x=\frac{3\pi}{4}+k2\pi \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}.$

Câu 17. Nghiệm của phương trình $\tan 2x-\cot\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0$ là

A. $x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{3}, k\in\mathbb{Z}$

B. $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$

C. $x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{3}, k\in\mathbb{Z}$

D. $x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{3}$ (k không chia hết cho 3)

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

$\tan 2x-\cot\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0$. Điều kiện: $\left\{\begin{array}{l} x\neq\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2} \\ x\neq\frac{\pi}{4}+k\pi \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \tan 2x=\cot\left(x-\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \tan 2x=\tan\left[\frac{\pi}{2}-\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right] \Leftrightarrow \tan 2x=\tan\left(\frac{3\pi}{4}-x\right)$

$\Leftrightarrow 2x=\frac{3\pi}{4}-x+k\pi \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{3}$

So với điều kiện ta phải có $k\neq 3\ell, \ell\in\mathbb{Z}$.

Câu 18. Số nghiệm của phương trình $\sin^2 x-\sin x=0$ với $x\in[0;2\pi]$ là

A. 4 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 1

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Ta có $\sin^2 x-\sin x=0 \Leftrightarrow \sin x(\sin x-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x=0 \\ \sin x=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=k\pi \\ x=\frac{\pi}{2}+k2\pi \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}.$

Vì $x\in[0;2\pi]$ nên ta có nghiệm $x=0; \frac{\pi}{2}; \pi; 2\pi$. Vậy phương trình có 4 nghiệm.

Câu 19. Nghiệm của phương trình $\sin x+\cos x=\sqrt{5}\sin 5x$ là

A. $\left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2} \\ x=\frac{\pi}{8}+\frac{k2\pi}{3} \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$

B. $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2} \\ x=\frac{\pi}{8}+\frac{k2\pi}{3} \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$

C. $\left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2} \\ x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{3} \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$

D. $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{16}+\frac{k\pi}{2} \\ x=\frac{\pi}{8}+\frac{k2\pi}{3} \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Ta có: $\sin x+\cos x=\sqrt{5}\sin 5x \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin 5x \Leftrightarrow \sin 5x=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5x=x+\frac{\pi}{4}+k2\pi \\ 5x=\pi-x-\frac{\pi}{4}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x=\frac{\pi}{4}+k2\pi \\ 6x=\frac{3\pi}{4}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{16}+\frac{k\pi}{2} \\ x=\frac{\pi}{8}+\frac{k2\pi}{3} \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}.$$

Câu 20. Số nghiệm của phương trình $\cos^2 x+\cos x=0$ với $\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}$ là

A. 1 **B.** 2 **C.** 0 **D.** 3

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

$$\cos^2 x+\cos x=0 \Leftrightarrow \cos x(\cos x+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x=0 \\ \cos x=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2}+k\pi \\ x=\pi+k2\pi \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}.$$

Vì $\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}$ nên ta có một nghiệm là $x=\pi$.

Câu 21. Số nghiệm của phương trình $\cos^2 5\pi x=1$ với $1\le x\le 4$ là

A. 4 **B.** 8 **C.** 12 **D.** 6

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Ta có: $\cos^2 5\pi x=1 \Leftrightarrow \frac{1+\cos 10\pi x}{2}=1 \Leftrightarrow \cos 10\pi x=1 \Leftrightarrow 10\pi x=k2\pi \Leftrightarrow x=\frac{2k}{5}, k\in\mathbb{Z}$.

Vì $1\le x\le 4$ nên $1\le\frac{2k}{5}\le 4 \Leftrightarrow 5\le 2k\le 20$

$\Rightarrow \frac{5}{2}\le k\le 10$ và $k\in\mathbb{Z}$ do đó ta chọn $k=3;4;...;10$.

Suy ra phương trình có 8 nghiệm.

Câu 22. Số nghiệm của phương trình $\cos^2 6\pi x=\frac{3}{4}$ với $0<x<1$ là

A. 7 **B.** 9 **C.** 10 **D.** 11

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Ta có: $\cos^2 6\pi x = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{1+\cos 12\pi x}{2} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \cos 12\pi x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 12\pi x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 12\pi x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{36} + \frac{k}{6} \\ x = -\frac{1}{36} + \frac{k}{6} \end{array}\right.$

- Xét $x = \frac{1}{36} + \frac{k}{6}$

Vì $0 < x < 1$ nên $0 < \frac{1}{36} + \frac{k}{6} < 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{6} < k < \frac{35}{6}$ và $k \in \mathbb{Z}$ nên ta chọn $k = 0;1;2;3;4;5\,(a)$

- Xét $x = -\frac{1}{36} + \frac{k}{6}$

Vì $0 < x < 1$ nên $0 < -\frac{1}{36} + \frac{k}{6} < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{6} < k < \frac{35}{6}$ và $k \in \mathbb{Z}$ nên ta chọn $k = 1;2;3;4;5 \quad (b)$

Từ (a) và (b) ta có 11 số k suy ra phương trình có 11 nghiệm.

Câu 23. Nghiệm của phương trình $\cos\left(5x - 45^o\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ là

A. $\left[\begin{array}{l} x = 30^o + k72^o \\ x = 45^o + k72^o \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$

B. $\left[\begin{array}{l} x = 39^o + k72^o \\ x = 21^o + k72^o \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$

C. $\left[\begin{array}{l} x = 39^o + k72^o \\ x = -21^o + k72^o \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$

D. Đáp án khác

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Ta có: $\cos\left(5x - 45^o\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos\left(5x - 45^o\right) = \cos 150^o \Leftrightarrow 5x - 45^o = \pm 150^o + k360^o, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 39^o + k72^o \\ x = -21^o + k72^o \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$

Câu 24. Nghiệm của phương trình $\cos x + \sqrt{3}\sin x = \sqrt{3}$ là

A. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

B. $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$

C. $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

D. Đáp án khác

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Ta có: $\cos x + \sqrt{3}\sin x = \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{3}\cos x + \sin\frac{\pi}{3}\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$

Câu 25. Nghiệm của phương trình $6\sin 2x - 3\cos 2x = 7$ là

A. $x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ **B.** $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ **C.** Vô nghiệm **D.** Đáp án khác

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

$6\sin 2x - 3\cos 2x = 7$

Ta có: $a^2 + b^2 = 36 + 9 = 45 < c^2 = 49 \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

Câu 26. Nghiệm của phương trình $\sqrt{3}\cos 5x + \sin 5x - 2\cos 3x = 0$ là

A. $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{4} \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$ **B.** $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{14} + \frac{k\pi}{4} \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$ **C.** $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{48} + \frac{k\pi}{4} \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$ **D.** $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{48} + \frac{k\pi}{4} \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Ta có: $\sqrt{3}\cos 5x + \sin 5x - 2\cos 3x = 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 5x + \frac{1}{2}\sin 5x = \cos 3x$

$\Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{6}\cos 5x + \sin\frac{\pi}{6}\sin 5x = \cos 3x \Leftrightarrow \cos\left(5x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos 3x$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5x - \frac{\pi}{6} = 3x + k2\pi \\ 5x - \frac{\pi}{6} = -3x + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{48} + \frac{k\pi}{4} \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$

Câu 27. Nghiệm của phương trình $3\sin x + 2\cos x = 4$ là

A. Vô nghiệm **B.** $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ **C.** $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ **D.** Đáp án khác

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Ta có: $a^2 + b^2 = 9 + 4 = 13 < c^2 = 16$. Suy ra phương trình vô nghiệm.

Câu 28. Phương trình $3\sin x + 4\cos x = \frac{5}{2}$ và $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ có nghiệm là

A. $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} - \alpha + \frac{k\pi}{2} \\ x = \frac{4\pi}{3} - \alpha + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$ **B.** $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} - \alpha + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} - \alpha + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$

C. $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} - \alpha + k\pi \\ x = \frac{3\pi}{4} + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$ **D.** Đáp án khác

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Ta có: $3\sin x+4\cos x=\frac{5}{2}\Leftrightarrow\frac{3}{5}\sin x+\frac{4}{5}\cos x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\cos\alpha\sin x+\sin\alpha\cos x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\sin\left(x+\alpha\right)=\sin\frac{\pi}{6}$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+\alpha=\frac{\pi}{6}+k2\pi\\x+\alpha=\pi-\frac{\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{6}-\alpha+k2\pi\\x=\frac{5\pi}{6}-\alpha+k2\pi\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}$

Câu 29. Nghiệm của phương trình $\sin 7x+\sqrt{3}\cos 7x=\sqrt{2}$ là

A. Vô nghiệm

B. $\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{21}+\frac{k2\pi}{7}\\x=\frac{5\pi}{21}+\frac{k2\pi}{7}\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}$

C. $\left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{42}+\frac{k2\pi}{7}\\x=\frac{5\pi}{42}+\frac{k2\pi}{7}\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}$

D. $\left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{84}+\frac{k2\pi}{7}\\x=\frac{5\pi}{84}+\frac{k2\pi}{7}\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Ta có: $\sin 7x+\sqrt{3}\cos 7x=\sqrt{2}\Leftrightarrow\frac{1}{2}\sin 7x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 7x=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow\cos\frac{\pi}{3}\sin 7x+\sin\frac{\pi}{3}\cos 7x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow\sin\left(7x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}7x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{4}+k2\pi\\7x+\frac{\pi}{3}=\pi-\frac{\pi}{4}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{84}+\frac{k2\pi}{7}\\x=\frac{5\pi}{84}+\frac{k2\pi}{7}\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}$

Câu 30. Nghiệm của phương trình $\sin 5x+\sqrt{3}\cos 5x=2\sin 7x$ là

A. Vô nghiệm

B. $\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{3}+k\pi\\x=\frac{\pi}{18}+k\pi\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}$

C. $\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4}+k\pi\\x=\frac{\pi}{18}+\frac{k\pi}{6}\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}$

D. $\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{6}+k\pi\\x=\frac{\pi}{18}+\frac{k\pi}{6}\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Ta có: $\sin 5x+\sqrt{3}\cos 5x=2\sin 7x\Leftrightarrow\frac{1}{2}\sin 5x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 5x=\sin 7x\Leftrightarrow\cos\frac{\pi}{3}\sin 5x+\sin\frac{\pi}{3}\cos 5x=\sin 7x$

$\Leftrightarrow\sin\left(5x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin 7x\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}7x=5x+\frac{\pi}{3}+k2\pi\\7x=\pi-5x-\frac{\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{6}+k\pi\\x=\frac{\pi}{18}+\frac{k\pi}{6}\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}$

Câu 31. Nghiệm của phương trình $\sqrt{3}\cos 5x-2\cos 3x+\sin 5x=0$ là

A. $\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{12}+k\pi\\x=\frac{\pi}{48}+\frac{k\pi}{4}\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}$

B. $\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{6}+k\pi\\x=\frac{\pi}{48}+\frac{k\pi}{4}\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}$

C. $\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{12}+k\pi\\x=\frac{\pi}{24}+\frac{k\pi}{4}\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}$

D. Đáp án khác

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Ta có: $\sqrt{3}\cos 5x - 2\cos 3x + \sin 5x = 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 5x + \frac{1}{2}\sin 5x = \cos 3x$

$\Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{6}\cos 5x + \sin\frac{\pi}{6}\sin 5x = \cos 3x \Leftrightarrow \cos\left(5x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos 3x$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5x - \frac{\pi}{6} = 3x + k2\pi \\ 5x - \frac{\pi}{6} = -3x + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{48} + \frac{k\pi}{4} \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$

Câu 32. Nghiệm của phương trình $3\sin 3x - \sqrt{3}\cos 9x = 1 + 4\sin^3 3x$ là

A. Vô nghiệm

B. $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{9} \\ x = \frac{7\pi}{54} + \frac{k2\pi}{9} \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$

C. $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{9} \\ x = \frac{7\pi}{54} + \frac{k2\pi}{9} \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$

D. $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{9} \\ x = \frac{7\pi}{27} + \frac{k2\pi}{9} \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Ta có: $3\sin 3x - \sqrt{3}\cos 9x = 1 + 4\sin^3 3x \Leftrightarrow \left(3\sin 3x - 4\sin^3 3x\right) - \sqrt{3}\cos 9x = 1 \Leftrightarrow \sin 9x - \sqrt{3}\cos 9x = 1$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin 9x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 9x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{3}\sin 9x - \sin\frac{\pi}{3}\cos 9x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin\left(9x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{6}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 9x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 9x - \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{9} \\ x = \frac{7\pi}{54} + \frac{k2\pi}{9} \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$

Câu 33. Nghiệm của phương trình $4\sin 2x - 3\cos 2x = 3\left(4\sin x - 1\right)$ là

A. $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ **B.** $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ **C.** $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ **D.** Vô nghiệm

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Ta có: $4\sin 2x - 3\cos 2x = 3\left(4\sin x - 1\right)$

$\Leftrightarrow 8\sin x\cos x - 3\left(1 - 2\sin^2 x\right) = 12\sin x - 3$

$\Leftrightarrow 8\sin x\cos x - 3 + 6\sin^2 x = 12\sin x - 3$

$\Leftrightarrow 8\sin x\cos x + 6\sin^2 x - 12\sin x = 0$

$\Leftrightarrow 2\sin x\left(4\cos x + 3\sin x - 6\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=0 \\ 4\cos x+3\sin x=6 \text{ (vô nghiệm vì } a^2+b^2<c^2)\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow x=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Câu 34. Nghiệm của phương trình $9\sin x+6\cos x-3\sin 2x+\cos 2x=8$ là

A. $x=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ **B.** $x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ **C.** $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ **D.** $x=\pi+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Ta có: $9\sin x+6\cos x-3\sin 2x+\cos 2x=8$

$\Leftrightarrow 9\sin x+6\cos x-6\sin x\cos x+1-2\sin^2 x=8$

$\Leftrightarrow 9\sin x-9+6\cos x-6\sin x\cos x+2-2\sin^2 x=0$

$\Leftrightarrow 9(\sin x-1)-6\cos x(\sin x-1)-2(\sin x-1)(\sin x+1)=0$

$\Leftrightarrow (\sin x-1)(9-6\cos x-2\sin x-2)=0$

$\Leftrightarrow (\sin x-1)(-6\cos x-2\sin x+7)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=1 \\ 6\cos x+2\sin x=7 \text{ (vô nghiệm vì } a^2+b^2<c^2)\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Câu 35. Nghiệm của phương trình $2\cos^2 x+5\cos x-3=0$ là

A. $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ **B.** $x=\pm\dfrac{\pi}{6}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ **C.** $\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{3}+k\pi \\ x=\dfrac{\pi}{6}+k\pi\end{array}\right.,\ k\in\mathbb{Z}$ **D.** Đáp án khác

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Ta có: $2\cos^2 x+5\cos x-3=0$

Đặt $t=\cos x$, với $-1\le t\le 1$ ta được phương trình $2t^2+5t-3=0$ phương trình này có hai nghiệm là $t_1=-3$ và $t_2=\dfrac{1}{2}$ trong đó $t_1=-3$ loại do không thỏa điều kiện $-1\le t\le 1$. Do đó:

$2\cos^2 x+5\cos x-3=0 \Leftrightarrow \cos x=\dfrac{1}{2}=\cos\dfrac{\pi}{3} \Leftrightarrow x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Câu 36. Số nghiệm của phương trình $4\sin^2 2x-2\left(1+\sqrt{2}\right)\sin 2x+\sqrt{2}=0$ với $x\in(0;\pi)$ là

A. 3 **B.** 4 **C.** 2 **D.** 1

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Ta có: $4\sin^2 2x-2\left(1+\sqrt{2}\right)\sin 2x+\sqrt{2}=0$ (1)

Đặt $t=\sin 2x,\ |t|\le 1$.

Phương trình trở thành: $4t^2 - 2\left(1+\sqrt{2}\right)t + \sqrt{2} = 0$ (2)

$\Delta' = \left(1+\sqrt{2}\right)^2 - 4\sqrt{2} = \left(1-\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = \sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^2} = \left|1-\sqrt{2}\right| = \sqrt{2}-1$

$$(2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ t_2 = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

Suy ra (1) có nghiệm: $\sin 2x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \vee \sin 2x = \dfrac{1}{2}$

- $\begin{cases} \sin 2x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 < x < \pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = \sin \dfrac{\pi}{4} \\ 0 < 2x < 2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \dfrac{\pi}{4} \\ 2x = \dfrac{3\pi}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{8} \\ x = \dfrac{3\pi}{8} \end{array}\right.$
- $\begin{cases} \sin 2x = \dfrac{1}{2} \\ 0 < x < \pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = \sin \dfrac{\pi}{6} \\ 0 < 2x < 2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \dfrac{\pi}{6} \\ 2x = \dfrac{5\pi}{6} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{12} \\ x = \dfrac{5\pi}{12} \end{array}\right.$

Vậy (1) có 4 nghiệm.

Câu 37. Với $x \in \left[-\pi; 4\pi\right]$ số nghiệm của phương trình $\sin^2 2x - \cos 2x + 1 = 0$ là:

A. 2 **B.** 4 **C.** 6 **D.** 8

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Ta có: $\sin^2 2x - \cos 2x + 1 = 0$ (1)

$\Leftrightarrow 1 - \cos^2 2x - \cos 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos^2 2x + \cos 2x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 1 \\ \cos 2x = -2\ (VN) \end{array}\right. \Leftrightarrow 2x = k2\pi \Leftrightarrow x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Do $-\pi \le x \le 4\pi \Rightarrow -\pi \le k\pi \le 4\pi \Rightarrow -1 \le k \le 4$ và $k \in \mathbb{Z}$ nên ta được $k = 0; -1; 1; 2; 3; 4$. Tương ứng với sáu số k $\Rightarrow (1)$ có 6 nghiệm.

Câu 38. Nghiệm của phương trình $\sqrt{3}\tan^2 x - \left(1+\sqrt{3}\right)\tan x + 1 = 0$ là

A. $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ **B.** $x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ **C.** $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi \end{array}\right.,\ k \in \mathbb{Z}$ **D.** $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi \end{array}\right.,\ k \in \mathbb{Z}$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Ta có: $\sqrt{3}\tan^2 x - \left(1+\sqrt{3}\right)\tan x + 1 = 0$ (1)

Phương trình có dạng: $a+b+c=0$ do đó $(1)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\tan x=1\\ \tan x=\frac{1}{\sqrt{3}}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4}+k\pi\\ x=\frac{\pi}{6}+k\pi\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}$.

Câu 39. Từ phương trình $\cos 3x-2\cos 2x=2$ ta tìm được giá trị của $\cos x$ bằng:

A. $0\vee-\frac{1}{2}$ **B.** $0\vee\frac{1}{2}$ **C.** $\frac{\sqrt{2}}{2}\vee\frac{1}{2}$ **D.** 0

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Ta có: $\cos 3x-2\cos 2x=2\Leftrightarrow 4\cos^2 x-3\cos x-2\left(2\cos^2 x-1\right)=2\Leftrightarrow 4\cos^3 x-4\cos^2 x-3\cos x=0$

$$\Leftrightarrow\cos x\left(4\cos^2 x-4\cos x-3\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ 4\cos^2 x-4\cos x-3=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \left[\begin{array}{l}\cos x=-\frac{1}{2}=\cos\frac{2\pi}{3}\\ \cos x=\frac{3}{2}\ \text{(loại)}\end{array}\right.\end{array}\right.$$

Câu 40. Từ phương trình $3\sin^3 x-3\cos^2 x+7\sin x-\cos 2x+1=0$ ta tìm được giá trị của x là:

A. $x=\frac{\pi}{6}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ **B.** $x=\frac{\pi}{4}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ **C.** $x=\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ **D.** Đáp án khác

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Ta có: $3\sin^3 x-3\cos^2 x+7\sin x-\cos 2x+1=0$

$\Leftrightarrow 3\sin^3 x-3\left(1-\sin^2 x\right)+7\sin x+2\sin^2 x=0\Leftrightarrow 3\sin^3 x+5\sin^2 x+7\sin x-3=0$.

Đặt $t=\sin x,\ |t|\le 1$.

Phương trình trở thành: $3t^3+5t^2+7t-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3t-1=0\\ t^2+2t+3=0\ (VN)\end{array}\right.\Leftrightarrow t=\frac{1}{3}$

Suy ra $\sin x=\frac{1}{3}$. So với đáp án ta có: $\sin\left(\frac{\pi}{6}+k2\pi\right)=\frac{1}{2}$, $\sin\left(\frac{\pi}{4}+k2\pi\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\left(\frac{\pi}{4}+k\pi\right)=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 41. Phương trình $\sqrt{3}\sin x-\cos x=1$ có số nghiệm thuộc khoảng $(-\pi;\pi)$ là:

A. 4 **B.** 3 **C.** 2 **D.** 1

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Ta có: $\sqrt{3}\sin x-\cos x=1\Leftrightarrow\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\cos\frac{\pi}{6}\sin x-\sin\frac{\pi}{6}\cos x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}+k2\pi\\ x-\frac{\pi}{6}=\pi-\frac{\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{3}+k2\pi\\ x=\pi+k2\pi\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}.$$

- Xét $x=\frac{\pi}{3}+k2\pi$. Do $-\pi<x<\pi \Rightarrow -\pi<\frac{\pi}{3}+k2\pi<\pi \Rightarrow -\frac{4\pi}{3}<k2\pi<\frac{2\pi}{3} \Rightarrow -\frac{2}{3}<k<\frac{1}{3}$ và $k\in\mathbb{Z}$ nên

ta chọn $k=0$. Suy ra có nghiệm $x=\frac{\pi}{3}$.

- Xét $x=\pi+k2\pi$ ta không chọn được nghiệm thỏa $-\pi<x<\pi$.

Vậy phương trình có 1 nghiệm $x=\frac{\pi}{3}$.

Câu 42. Nghiệm của phương trình $\sin 5x+\sqrt{3}\cos 5x=2\sin 7x$ là

A. $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{4}+k\pi \\ x=\frac{\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$ **B.** $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{6}+k\pi \\ x=\frac{\pi}{18}+\frac{k\pi}{6} \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$ **C.** $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{3}+k2\pi \\ x=\frac{\pi}{5}+k\pi \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$ **D.** $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{7}+\frac{k\pi}{7} \\ x=\frac{-\pi}{5}+\frac{k\pi}{5} \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Ta có: $\sin 5x+\sqrt{3}\cos 5x=2\sin 7x \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin 5x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 5x=\sin 7x \Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{3}\sin 5x+\sin\frac{\pi}{3}\cos 5x=\sin 7x$

$$\Leftrightarrow \sin\left(5x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin 7x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 7x=5x+\frac{\pi}{3}+k2\pi \\ 7x=\pi-5x-\frac{\pi}{3}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{6}+k\pi \\ x=\frac{\pi}{18}+\frac{k\pi}{6} \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}.$$

Câu 43. Số nghiệm của phương trình $\sqrt{3}\cos 5x-2\cos 3x+\sin 5x=0$ với $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ là

A. 4 **B.** 3 **C.** 2 **D.** 0

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Ta có: $\sqrt{3}\cos 5x-2\cos 3x+\sin 5x=0$ (1)

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 5x+\frac{1}{2}\sin 5x=\cos 3x \Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{6}\cos 5x+\sin\frac{\pi}{6}\sin 5x=\cos 3x \Leftrightarrow \cos\left(5x-\frac{\pi}{6}\right)=\cos 3x$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5x-\frac{\pi}{6}=3x+k2\pi \\ 5x-\frac{\pi}{6}=-3x+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{12}+k\pi \\ x=\frac{\pi}{48}+\frac{k\pi}{4} \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$$

- Xét $x=\frac{\pi}{12}+k\pi$. Do $0<x<\frac{\pi}{2} \Rightarrow 0<\frac{\pi}{12}+k\pi<\frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{12}<k\pi<\frac{5\pi}{12} \Rightarrow -\frac{1}{2}<k<\frac{5}{12}$ và $k\in\mathbb{Z}$ nên

$k=0$. Nghiệm tương ứng là $x=\frac{\pi}{12}$.

- Xét $x=\frac{\pi}{48}+\frac{k\pi}{4}$. Do $0<x<\frac{\pi}{2} \Rightarrow 0<\frac{\pi}{48}+\frac{k\pi}{4}<\frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{48}<\frac{k\pi}{4}<\frac{23\pi}{48} \Rightarrow -\frac{1}{12}<k<\frac{23}{12}$ và $k\in\mathbb{Z}$

nên $k=0;1$. Nghiệm tương ứng là $x=\frac{\pi}{48}, x=\frac{13\pi}{48}$.

Tóm lại (1) có 3 nghiệm: $x=\frac{\pi}{12}$, $x=\frac{\pi}{48}$, $x=\frac{13\pi}{48}$.

Câu 44. Phương trình $\frac{\sqrt{3}}{\cos x}+\frac{1}{\sin x}=8\sin x$ có nghiệm là

A. $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{4}+k\pi \\ x=-\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2} \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$

B. $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{3}+k\pi \\ x=-\frac{\pi}{4}+k\pi \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$

C. $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{6}+k\pi \\ x=-\frac{\pi}{3}+k2\pi \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$

D. $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{6}+k\pi \\ x=-\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2} \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Ta có: $\frac{\sqrt{3}}{\cos x}+\frac{1}{\sin x}=8\sin x$ (1)

Điều kiện: $\cos x.\sin x\neq 0 \Leftrightarrow \sin 2x\neq 0$

$(1)\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin x+\cos x=8\sin^2 x.\cos x$

$\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin x+\cos x=8.\frac{1}{2}(1-\cos 2x).\cos x$

$\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin x+\cos x=4\cos x-4\cos 2x.\cos x$

$\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin x+\cos x=4\cos x-4.\frac{1}{2}(\cos x+\cos 3x)$

$\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin x-\cos x=-2\cos 3x \Leftrightarrow \cos 3x=\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x$

$\Leftrightarrow \cos 3x=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x=x+\frac{\pi}{3}+k2\pi \\ 3x=-x-\frac{\pi}{3}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{6}+k\pi \\ x=-\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2} \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$

Câu 45. Giải phương trình $6\sin^2 x+\sin x\cos x-\cos^2 x=2$ với $x\in\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$ có số nghiệm là

A. 1 **B.** 2 **C.** 0 **D.** 3

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Ta có: $6\sin^2 x+\sin x\cos x-\cos^2 x=2$ (1)

- Xét $\cos x=0$ (với $\cos x=0$ thì $\sin^2 x=1$) thay $\cos^2 x=0$ vào (1) ta được: $6\sin^2 x=2$, vô lý. Vậy $\cos x=0$ không phải là nghiệm của phương trình (1).
- Xét $\cos x\neq 0$. Chia 2 vế của (1) cho $\cos^2 x$ ta được:

$$6\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+\frac{\sin x.\cos x}{\cos^2 x}-\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}=\frac{2}{\cos^2 x}$$

$$\Leftrightarrow 6\tan^2 x+\tan x-1=2\left(1+\tan^2 x\right)\Leftrightarrow 4\tan^2 x+\tan x-3=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x=-1\\ \tan x=\frac{3}{4}\end{array}\right. \left(\text{loại vì } x\in\left[-\frac{\pi}{2};0\right], \tan x<0\right)\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Do $x\in\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$ nên ta chọn $x=-\frac{\pi}{4}$.

Câu 46. Giải phương trình $\sin^2 x-\sqrt{3}\sin x\cos x+2\cos^2 x=1$ ta được họ nghiệm là

A. $\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4}+k\pi\\ x=\frac{\pi}{3}+k\pi\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$ **B.** $\left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{4}+k\pi\\ x=\frac{\pi}{3}+k\pi\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$ **C.** $x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ **D.** $\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ x=\frac{\pi}{6}+k\pi\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Ta có: $\sin^2 x-\sqrt{3}\sin x\cos x+2\cos^2 x=1$ (1)

Cách 1: Xét $\cos x=0$ (với $\cos x=0$ thì $\sin^2 x=1$). Thay $\cos x=0$ vào (1) ta được: $\sin^2 x=1$ đúng. Vậy $\cos x=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ là nghiệm của (1).

Xét $\cos x\neq 0$ chia (1) cho $\cos^2 x$ ta được:

$$\tan^2 x-\sqrt{3}\tan x+2=1+\tan^2 x\Leftrightarrow \tan x=\frac{1}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+k\pi.$$

Vậy nghiệm của (1) là $\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ x=\frac{\pi}{6}+k\pi\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$.

Cách 2: Sử dụng công thức hạ bậc và nhân đôi ta được:

$$\frac{1-\cos 2x}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+2\frac{1+\cos 2x}{2}=1\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\cos 2x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{6}\sin 2x-\sin\frac{\pi}{6}\cos 2x=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}+k2\pi\\ 2x-\frac{\pi}{6}=\pi-\frac{\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{6}+k\pi\\ x=\frac{\pi}{2}+k\pi\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$$

Câu 47. Nghiệm của phương trình $6\sin x-2\cos^3 x=5\sin 2x.\cos x$ là

A. $-\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ **B.** $\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ **C.** $\frac{\pi}{4}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ **D.** $-\frac{\pi}{4}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Ta có: $6\sin x-2\cos^3 x=5\sin 2x.\cos x\Leftrightarrow 6\sin x-2\cos^3 x=5\sin x.\cos^2 x$ (1)

- Nhận xét: $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ không phải là nghiệm của (1).
- Chia (1) hai vế cho $\cos^3 x$ ta được:

$\frac{6\sin x}{\cos^3 x}-2\frac{\cos^3 x}{\cos^3 x}=5\frac{\sin x.\cos^2 x}{\cos^3 x}\Leftrightarrow 6\tan x\left(1+\tan^2 x\right)-2=5\tan x$

$\Leftrightarrow 6\tan^3 x-4\tan x-2=0\Leftrightarrow 3\tan^3 x-2\tan x-1=0$

Đặt $t=\tan x$. Phương trình trở thành: $3t^3-2t-1=0\Leftrightarrow (t-1)\left(3t^2+3t+1\right)=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\3t^2+3t+1=0\ (VN)\end{array}\right.\Leftrightarrow t=1$

Suy ra $\tan x=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Câu 48. Nghiệm của phương trình $3\cos^4 x-4\cos^2 x.\sin^2 x+\sin^4 x=0$ là

A. $\left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{3}+k\pi\\x=\frac{\pi}{4}+k\pi\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}$ **B.** $\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4}+k\pi\\x=\frac{\pi}{3}+k\pi\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}$ **C.** $\left[\begin{array}{l}x=\pm\frac{\pi}{4}+k\pi\\x=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}$ **D.** Vô nghiệm

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Ta có: $3\cos^4 x-4\cos^2 x.\sin^2 x+\sin^4 x=0$ (1)

Cách 1: Vì $\cos x=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ không phải là nghiệm của (1) nên ta chia 2 vế của (1) cho $\cos^2 x$, ta được: $3-4\tan^2 x+\tan^4 x=0$.

Đặt $t=\tan^2 x,\ t\geq 0$. Phương trình trở thành: $t^2-4t+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=3\end{array}\right.$

- Với $t=1$ ta suy ra: $\tan^2 x=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\tan x=1\\\tan x=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4}+k\pi\\x=-\frac{\pi}{4}+k\pi\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}$
- Với $t=3$ ta suy ra: $\tan^2 x=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\tan x=\sqrt{3}\\\tan x=-\sqrt{3}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{3}+k\pi\\x=-\frac{\pi}{3}+k\pi\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}$

Kết luận nghiệm của phương trình (1) là $\left[\begin{array}{l}x=\pm\frac{\pi}{4}+k\pi\\x=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}$.

Cách 2: Đặt $t=\cos^2 x\Rightarrow 1-t=\sin^2 x$.

Câu 49. Từ phương trình $\sin x\cos x=6\left(\sin x-\cos x-1\right)$ ta tìm được giá trị $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ bằng

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **B.** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ **C.** 1 **D.** -1

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Ta có: $\sin x.\cos x = 6(\sin x - \cos x - 1)$.

Đặt $t = \sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right), |t| \le \sqrt{2}$

Ta có: $t^2 = (\sin x - \cos x)^2 \Rightarrow \sin x.\cos x = \frac{1-t^2}{2}$.

Khi đó phương trình trở thành: $\frac{1-t^2}{2} = 6(t-1)$

$\Leftrightarrow t^2 + 12t - 13 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \vee t = -13$ (loại)

Với $t = 1 \Rightarrow \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 50. Từ phương trình $(1+\sqrt{2})(\cos x + \sin x) - \sin 2x - \sqrt{2} = 0$ ta tìm được $\sin 2x$ có giá trị bằng

A. 1 **B.** $\sqrt{2}$ **C.** -1 **D.** Đáp án khác

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

$(1+\sqrt{2})(\cos x + \sin x) - \sin 2x - 1 - \sqrt{2} = 0 \quad (1)$

Đặt $t = \cos x + \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right), |t| \le \sqrt{2}$

$\Rightarrow t^2 = (\cos x + \sin x)^2 \Rightarrow \sin 2x = t^2 - 1$

Khi đó phương trình trở thành:

$(1+\sqrt{2})t - (t^2 - 1) - 1 - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow t^2 - (1+\sqrt{2})t + \sqrt{2} = 0;\ (a+b+c=0)$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = \sqrt{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 2x = 1^2 - 1 = 0 \\ \sin 2x = \sqrt{2}^2 - 1 = 1 \end{array}\right.$

Câu 51. Từ phương trình $3(\sin x + \cos x) + 2\sin 2x + 3 = 0$ ta tìm được $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ có giá trị là:

A. $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$ **B.** $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$ **C.** $\left[\begin{array}{l} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1 \\ \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2} \end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1 \\ \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \end{array}\right.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Ta có: $3(\sin x + \cos x) + 2\sin 2x + 3 = 0 \quad (1)$

Đặt $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right),\ |t|\le\sqrt{2}\Rightarrow t^2-1=\sin 2x$

$$(1)\Leftrightarrow 3t+2\left(t^2-1\right)+3=0\Leftrightarrow 2t^2+3t+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1\\ t=-\frac{1}{2}\end{array}\right.$$

Câu 52. Từ phương trình $\left(1+\sqrt{3}\right)\left(\cos x+\sin x\right)-2\sin x.\cos x-1-\sqrt{3}=0$ ta tìm được $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ có giá trị là:

A. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ **B.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **C.** 1 **D.** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Ta có: $\left(1+\sqrt{3}\right)\left(\cos x+\sin x\right)-2\sin x.\cos x-1-\sqrt{3}=0$ (1)

Đặt $t=\cos x+\sin x=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right),\ |t|\le\sqrt{2}\Rightarrow t^2-1=2\sin x.\cos x$.

$(1)\Leftrightarrow\left(1+\sqrt{3}\right)t-\left(t^2-1\right)-1-\sqrt{3}=0\Leftrightarrow t^2-\left(1+\sqrt{3}\right)t+\sqrt{3}=0$. Phương trình này có dạng $a+b+c=0$ nên ta có $t_1=1;\ t_2=\sqrt{3}$. Nghiệm $t_2=\sqrt{3}$ loại.

Suy ra giá trị của $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Câu 53. Từ phương trình $\left(1+\sqrt{5}\right)\left(\sin x-\cos x\right)+\sin 2x-1-\sqrt{5=0}$ ta tìm được $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ có giá trị là:

A. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ **B.** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **D.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Ta có: $\left(1+\sqrt{5}\right)\left(\sin x-\cos x\right)+\sin 2x-1-\sqrt{5=0}$ (1)

Đặt $t=\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right),\ |t|\le\sqrt{2}\Rightarrow t^2=\left(\sin x-\cos x\right)^2\Rightarrow\sin 2x=1-t^2$

$(1)\Leftrightarrow\left(1+\sqrt{5}\right)+1-t^2-1-\sqrt{5}=0\Leftrightarrow t^2-\left(1+\sqrt{5}\right)t+\sqrt{5}=0;\ \left(a+b+c=0\right)$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\ (\text{nhận})\\ t=\sqrt{5}\ (\text{loại})\end{array}\right.$$

Với $t=1\Rightarrow\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1\Rightarrow\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Câu 54. Từ phương trình $5\sin 2x-16(\sin x+\cos x)+16=0$ ta tìm được $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ có giá trị là:

A. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ **B.** 1 **C.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **D.** -1

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Ta có: $5\sin 2x-16(\sin x+\cos x)+16=0$ (1)

Đặt $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right), |t|\le\sqrt{2}$

$\Rightarrow t^2=(\sin x+\cos x)^2\Rightarrow t^2-1=\sin 2x$

$(1)\Leftrightarrow 5(t^2-1)-16t+16=0\Leftrightarrow 5t^2-16t+11=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\text{ (nhận)}\\ t=\frac{11}{5}\text{ (loại)}\end{array}\right.$

Suy ra: $\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1\Rightarrow\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 55. Từ phương trình $5\sin 2x+12(\sin x-\cos x)+12=0$ ta tìm được $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ có giá trị là:

A. 1 **B.** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ **C.** -1 **D.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Ta có $5\sin 2x+12(\sin x-\cos x)+12=0$ (1)

Đặt $t=\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right), |t|\le\sqrt{2}\Rightarrow t^2=(\sin x-\cos x)^2\Rightarrow\sin 2x=1-t^2$

$(1)\Leftrightarrow 5(1-t^2)+12t+12=0\Leftrightarrow 5t^2-12t-17=0$. Phương trình này có dạng $a-b+c=0$ nên có nghiệm $t_1=-1, t_2=\frac{-c}{a}=\frac{17}{5}$. Nghiệm $t_2=\frac{17}{5}$ loại vì $|t|\le\sqrt{2}$.

Vậy $\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-1\Rightarrow\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 56. Từ phương trình $6(\sin x-\cos x)+\sin x\cos x+6=0$ ta tìm được giá trị $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ là:

A. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ **B.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **C.** -1 **D.** 1

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Ta có: $6(\sin x-\cos x)+\sin x\cos x+6=0$ (1)

Đặt $t=\sin x-\cos x=-\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right),\ |t|\le\sqrt{2}\Rightarrow\frac{1-t^2}{2}=\sin x.\cos x$

Do đó: $(1)\Leftrightarrow 6t+\frac{1-t^2}{2}+6=0\Leftrightarrow t^2-12t-13=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1\text{ (nhận)}\\ t=13\text{ (loại)}\end{array}\right.$

Vậy $-\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-1\Rightarrow\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 57. Từ phương trình $(1+\cos x)(1+\sin x)=2$ ta tìm được giá trị của $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ là:

A. -1 **B.** 1 **C.** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ **D.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Ta có: $(1+\cos x)(1+\sin x)=2\Leftrightarrow 1+(\sin x+\cos x)+\cos x.\sin x=2\quad(1)$

Đặt $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right),\ |t|\le\sqrt{2}\Rightarrow\frac{t^2-1}{2}=\sin x.\cos x$

Do đó: $(1)\Leftrightarrow 1+t+\frac{t^2-1}{2}=2\Leftrightarrow t^2+2t-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\text{ (nhận)}\\ t=-3\text{ (loại)}\end{array}\right.$

Vậy $\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1\Rightarrow\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Câu 58. Từ phương trình $\sqrt{2}(\sin x+\cos x)=\tan x+\cot x$ ta tìm được giá trị của $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ là:

A. 1 **B.** -1 **C.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **D.** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Ta có: $\sqrt{2}(\sin x+\cos x)=\tan x+\cot x\quad(1)$

Điều kiện: $\begin{cases}\cos x\ne 0\\ \sin x\ne 0\end{cases}$

$$(1)\Leftrightarrow\sqrt{2}(\sin x+\cos x)=\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}$$
$$\Leftrightarrow\sqrt{2}(\sin x+\cos x).\cos x.\sin x=\sin^2 x+\cos^2 x$$
$$\Leftrightarrow\sqrt{2}(\sin x+\cos x).\cos x.\sin x=1$$

Đặt $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right),\ |t|\le\sqrt{2}\Rightarrow\frac{t^2-1}{2}=\sin x.\cos x$

Khi đó phương trình trở thành:

$$\sqrt{2}t\frac{t^2-1}{2}=1 \Leftrightarrow t^3-t-\sqrt{2}=0 \Leftrightarrow \left(t-\sqrt{2}\right)\left(t^2+\sqrt{2}t+1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\sqrt{2} \\ t^2+\sqrt{2}t+1=0\ (VN) \end{array}\right. \Leftrightarrow t=\sqrt{2}$$

Vậy $\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2} \Rightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1$.

Câu 59. Nghiệm của phương trình $\sin x+\sin 5x+\sin 9x=0$ với $0<x<\frac{\pi}{2}$ là:

A. $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{5} \\ x=\frac{2\pi}{5} \end{array}\right. \vee \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{6} \\ x=\frac{\pi}{3} \end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{9} \\ x=\frac{2\pi}{9} \end{array}\right.$ **C.** $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{4} \\ x=-\frac{5\pi}{4} \end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{3} \\ x=-\frac{2\pi}{3} \end{array}\right.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Ta có: $\sin x+\sin 5x+\sin 9x=0$ (1)

$\Leftrightarrow \sin 9x+\sin x+\sin 5x=0$

$\Leftrightarrow 2\sin 5x.\cos 4x+\sin 5x=0 \Leftrightarrow \sin 5x\left(2\cos 4x+1\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 5x=0 \\ 2\cos 4x+1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 5x=0 \\ \cos 4x=-\frac{1}{2} \end{array}\right.$

Do $0<x<\frac{\pi}{2} \Rightarrow 0<4x<2\pi \Rightarrow \cos 4x=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x=\frac{2\pi}{3} \\ 4x=\frac{4\pi}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{6} \\ x=\frac{\pi}{3} \end{array}\right.$

Ta còn lại: $\sin 5x=0 \Leftrightarrow 5x=k\pi \Leftrightarrow x=\frac{k\pi}{5}$

Do $0<x<\frac{\pi}{2} \Rightarrow 0<k<\frac{5}{2}$ và $k\in\mathbb{Z}$ nên ta chọn $k=1, k=2$. Vậy nghiệm của (1): $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{5} \\ x=\frac{2\pi}{5} \end{array}\right.$

Tóm lại (1) có nghiệm: $x=\frac{\pi}{5};\frac{2\pi}{5};\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}$.

Câu 60. Với $-\pi<x<\pi$ số nghiệm của phương trình $\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\cos 4x=0$ là:

A. 3 **B. 4** **C. 5** **D. 0**

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Ta có: $\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\cos 4x=0 \Leftrightarrow \left(\cos 4x+\cos x\right)+\left(\cos 2x+\cos 3x\right)=0$

$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{5x}{2}.\cos\frac{3x}{2}+2\cos\frac{5x}{2}.\cos\frac{x}{2}=0\Leftrightarrow\cos\frac{5x}{2}\left(\cos\frac{3x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)=0\Leftrightarrow 2\cos\frac{5x}{2}.\cos x.\cos\frac{x}{2}=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos\frac{5x}{2}=0\\ \cos x=0\\ \cos\frac{x}{2}=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{5x}{2}=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ x=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ \frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}+k\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{5}+\frac{k2\pi}{5}\\ x=\frac{\pi}{2}+k\pi\quad,k\in\mathbb{Z}\\ x=\pi+k2\pi\end{array}\right.$$

- Với $x=\frac{\pi}{5}+\frac{k2\pi}{5}$ và $-\pi<x<\pi\Rightarrow-\pi<\frac{\pi}{5}+\frac{k2\pi}{5}<\pi$

$\Rightarrow-\frac{6\pi}{5}<\frac{k2\pi}{5}<\frac{4\pi}{5}\Rightarrow-3<k<2$ và $k\in\mathbb{Z}$ nên ta chọn $k=-2;-1;0;1\Rightarrow$ ta được nghiệm là: $x=-\frac{3\pi}{5};x=-\frac{\pi}{5};x=\frac{\pi}{5};x=\frac{3\pi}{5}$.

- Với $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ và $-\pi<x<\pi\Rightarrow-\pi<\frac{\pi}{2}+k\pi<\pi$

$\Rightarrow-\frac{3\pi}{2}<k\pi<\frac{\pi}{2}\Rightarrow-\frac{3}{2}<k<\frac{1}{2}$ và $k\in\mathbb{Z}$ nên ta chọn $k=-1;0\Rightarrow$ ta được nghiệm là: $x=-\frac{\pi}{2};x=\frac{\pi}{2}$.

- Với $x=\pi+k2\pi$ không chọn được nghiệm thỏa mãn $-\pi<x<\pi$.

Tóm lại phương trình có 5 nghiệm.

Câu 61. Với $0<x<\frac{\pi}{4}$ số nghiệm của phương trình $\sin^2x+\sin^22x+\sin^23x=\frac{3}{2}$ là:

A. 2 **B.** 1 **C.** 0 **D.** 3

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Ta có: $\sin^2x+\sin^22x+\sin^23x=\frac{3}{2}\Leftrightarrow\frac{1-\cos2x}{2}+\frac{1-\cos4x}{2}+\frac{1-\cos6x}{2}=\frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow\cos6x+\cos2x+\cos4x=0\Leftrightarrow2\cos4x.\cos2x+\cos4x=0\Leftrightarrow\cos4x(2\cos2x+1)=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos4x=0\\ 2\cos2x+1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos4x=0\\ \cos2x=-\frac{1}{2}\end{array}\right.$$

- Do $0<x<\frac{\pi}{4}\Rightarrow0<2x<\frac{\pi}{2}\Rightarrow\cos2x>0$ nên $\cos2x=-\frac{1}{2}$ bị loại.

- Do $0<x<\frac{\pi}{4}\Rightarrow0<4x<\pi\Rightarrow\cos4x=0$ khi $4x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=\frac{\pi}{8}$.

Câu 62. Phương trình $\cos^24x+\cos^23x+\cos^22x+\cos^2x=2$ có nghiệm là:

A. $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{4}+k\pi \\ x=\frac{\pi}{2}+k\pi \\ x=\frac{\pi}{8}+k\pi \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$ **B.** $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2} \\ x=\frac{\pi}{2}+k2\pi \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$ **C.** $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2} \\ x=-\frac{\pi}{4}+k2\pi \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$ **D.** $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{10}+\frac{k\pi}{5} \\ x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2} \\ x=\frac{\pi}{2}+k\pi \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

$\cos^2 4x+\cos^2 3x+\cos^2 2x+\cos^2 x=2$

$\Leftrightarrow \frac{1+\cos 8x}{2}+\frac{1+\cos 6x}{2}+\frac{1+\cos 4x}{2}+\frac{1+\cos 2x}{2}=2$

$\Leftrightarrow (\cos 8x+\cos 2x)+(\cos 6x+\cos 4x)=0$

$\Leftrightarrow 2\cos 5x.\cos 3x+2\cos 5x.\cos x=0$

$\Leftrightarrow \cos 5x(\cos 3x+\cos x)=0 \Leftrightarrow 2\cos 5x.\cos 2x.\cos x=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 5x=0 \\ \cos 2x=0 \\ \cos x=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5x=\frac{\pi}{2}+k\pi \\ 2x=\frac{\pi}{2}+k\pi \\ x=\frac{\pi}{2}+k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{10}+\frac{k\pi}{5} \\ x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2} \\ x=\frac{\pi}{2}+k\pi \end{array}\right.$

Câu 63. Phương trình $\tan x+\cot x=2(\sin 2x+\cos 2x)$ có họ nghiệm là:

A. $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2} \\ x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2} \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$ **B.** $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2} \\ x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2} \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$ **C.** $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{6}+k\pi \\ x=-\frac{\pi}{4}+k\pi \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$ **D.** $\varnothing$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Ta có: $\tan x+\cot x=2(\sin 2x+\cos 2x)$ (1). Điều kiện: $\begin{cases} \sin x\neq 0 \\ \cos x\neq 0 \end{cases}$

$(1)\Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}=2(\sin 2x+\cos 2x)$

$\Leftrightarrow \sin^2 x+\cos^2 x=2\sin x.\cos x(\sin 2x+\cos 2x)$

$\Leftrightarrow 1=\sin 2x(\sin 2x+\cos 2x)\Leftrightarrow 1-\sin^2 2x-\sin 2x.\cos 2x=0$

$\Leftrightarrow \cos^2 2x-\sin 2x.\cos 2x=0 \Leftrightarrow \cos 2x(\cos 2x-\sin 2x)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x=0 \\ \cos 2x=\sin 2x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x=0 \\ \tan 2x=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x=\frac{\pi}{2}+k\pi \\ 2x=\frac{\pi}{4}+k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2} \\ x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2} \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$

Câu 65. Với $-\pi<x<0$, số giá trị x thỏa mãn phương trình $\sin 2x-\sin x+2\cos x-1=0$ là:

A. 3 **B.** 2 **C.** 1 **D.** 0

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Ta có: $\sin 2x - \sin x + 2\cos x - 1 = 0$ (1)

$\Leftrightarrow 2\sin x.\cos x + 2\cos x - (\sin x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos x(\sin x + 1) - (\sin x + 1) = 0 \Leftrightarrow (\sin x + 1)(2\cos x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x + 1 = 0 \\ 2\cos x - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = -1 \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{array}\right.$

Do $-\pi < x < 0$ nên $\sin x = -1$ có nghiệm là $x = -\frac{\pi}{2}$.

Do $-\pi < x < 0$ nên $\cos x = \frac{1}{2}$ có nghiệm là $x = -\frac{\pi}{3}$.

Câu 65. Phương trình $\cos x(\cos 4x + 2) + \cos 2x.\cos 3x = 0, -\pi < x < \pi$ có số nghiệm là:

A. 0 **B.** 1 **C.** 3 **D.** 2

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Ta có: $\cos x(\cos 4x + 2) + \cos 2x.\cos 3x = 0$ (1)

$\Leftrightarrow \cos x(2\cos^2 2x - 1 + 2) + \cos 2x(4\cos^3 x - 3\cos x) = 0$

$\Leftrightarrow \cos x(2\cos^2 2x + 1) + \cos x.\cos 2x(4\cos^2 x - 3) = 0$

$\Leftrightarrow \cos x\left[2\cos^2 2x + 1 + \cos 2x(4\cos^2 x - 3)\right] = 0$

$\Leftrightarrow \cos x\left[2\cos^2 2x + 1 + \cos 2x(2.(1 + \cos 2x) - 3)\right] = 0$

$\Leftrightarrow \cos x(4\cos^2 2x - \cos 2x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ 4\cos^2 2x - \cos 2x + 1 = 0\ (VN) \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

Do $-\pi < x < \pi \Rightarrow -\pi < \frac{\pi}{2} + k\pi < \pi \Rightarrow -\frac{3\pi}{2} < k\pi < \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow -\frac{3}{2} < k < \frac{1}{2}$ và $k \in \mathbb{Z}$ nên ta chọn $k = -1; k = 0$.

$\Rightarrow$ Phương trình (1) có 2 nghiệm.

Câu 66. Cho phương trình $\sin\frac{x}{2}\sin x - \cos\frac{x}{2}\sin^2 x + 1 - 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = 0$ và $x \in [0; 2\pi]$. Số nghiệm của phương trình là:

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Ta có: $\sin\frac{x}{2}\sin x-\cos\frac{x}{2}\sin^2 x+1-2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)=0$

$\Leftrightarrow \sin\frac{x}{2}.\sin x-\cos\frac{x}{2}.\sin^2 x-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=0$

$\Leftrightarrow \sin\frac{x}{2}.\sin x-\cos\frac{x}{2}.\sin^2 x-\sin x=0$

$\Leftrightarrow \sin x\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\sin x-1\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}\sin x=0 & (a)\\ \sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\sin x-1=0 & (b)\end{array}\right.$

- Giải (a): $\sin x=0\Leftrightarrow x=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Do $x\in[0;2\pi]\Rightarrow 0\le k\pi\le 2\pi\Rightarrow 0\le k\le 2$ và $k\in\mathbb{Z}$ nên ta chọn $k=0;\ k=1;\ k=2$.

$\Rightarrow$Nghiệm của (a): $x=0;\ x=\pi;\ x=2\pi$.

- Giải (b): $\Leftrightarrow \sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}.2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-1=0$

$\Leftrightarrow \sin\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}\left(1-\sin^2\frac{x}{2}\right)-1=0\Leftrightarrow 2\sin^3\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}-1=0$

Đặt $t=\sin\frac{x}{2}$, $|t|\le 1$, khi đó ta được phương trình: $2t^3-t-1=0$

$\Leftrightarrow (t-1)\left(2t^2+2t+1\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=1\\ 2t^2+2t+1=0\ (VN)\end{array}\right.$

$t=1\Rightarrow \sin\frac{x}{2}=1\Rightarrow \frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}+k2\pi\Rightarrow x=\pi+k4\pi$.

Do $x\in[0;2\pi]$ nên ta có nghiệm $x=\pi$.

Tóm lại (1) có 3 nghiệm: $x=0;\ x=\pi;\ x=2\pi$.

ÔN TẬP CHƯƠNG I

Câu 1. Tập xác định của hàm số $y=\frac{1}{\sin x}$ là:

A. $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ **B.** $\mathbb{R}\setminus\{k2\pi;k\in\mathbb{Z}\}$ **C.** $\mathbb{R}\setminus\{k\pi;k\in\mathbb{Z}\}$ **D.** $\mathbb{R}\setminus\{0;\pi\}$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Điều kiện: $\sin x\neq 0\Leftrightarrow x\neq k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Vậy tập xác định của hàm số là: $D=\mathbb{R}\setminus\{k\pi;k\in\mathbb{Z}\}$

Câu 2. Tập xác định của hàm số $y=\frac{1}{\tan x}$ là:

A. $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}$ **B.** $\mathbb{R}\setminus\{k\pi;k\in\mathbb{Z}\}$ **C.** $\mathbb{R}\setminus\left\{0;\frac{\pi}{2};\pi;\frac{3\pi}{2}\right\}$ **D.** $\mathbb{R}\setminus\left\{k\frac{\pi}{2};k\in\mathbb{Z}\right\}$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Điều kiện: $\begin{cases}\tan x\neq 0\\ \cos x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin x\neq 0\\ \cos x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq k\pi\\ x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\end{cases},k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow x\neq k\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$.

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{k\frac{\pi}{2};k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Câu 3. Chu kỳ của hàm số $y(x)=\sin 2x$ là:

A. 2π **B.** $\frac{\pi}{2}$ **C.** π **D.** 4π

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $f(x+\pi)=\sin 2(x+\pi)=\sin(2x+2\pi)=\sin 2x,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Vậy hàm số tuần hoàn với chu kỳ là π. Ta chứng minh π là số dương nhỏ nhất.

Giả sử tồn tại số $T:0<T<\pi$, ta có: $\sin 2(x+T)=\sin 2x,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Cho $x=0\Rightarrow 2T=k\pi;\ k\in\mathbb{Z}$. Vì $0<T<\pi\Rightarrow k=1$.

$\Rightarrow T=\frac{\pi}{2}$. Cho $x=\frac{\pi}{4}$ và từ (*) ta có: $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\pi\right)=-1=\sin\frac{\pi}{2}=1$ (vô lý).

Câu 4. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\cos^2 x+2\sin x+2$ là:

A. 1 **B.** 2 **C.** 5 **D.** 3

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Ta có: $y=4-(\sin x-1)^2\leq 4\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Dấu "=" xảy ra, chẳng hạn tại $x=\frac{\pi}{2}$. Vậy $\max y=4$.

Câu 5. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sin^4 x-4\sin^2 x+5$ là:

A. 2 **B.** 1 **C.** 5 **D.** 3

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Ta có: $y=\left(2-\sin^2 x\right)^2+1$

Vì $0\le\sin^2 x\le 1\Rightarrow\left(2-\sin^2 x\right)^2\ge 1\Rightarrow y\ge 2$

Dấu "=" xảy ra, chẳng hạn tại $x=\frac{\pi}{2}$. Vậy $\min y=2$.

Câu 6. Hàm số $y=\tan x+2\sin x$ là:

A. Hàm số lẻ **B.** Hàm số chẵn **C.** Hàm số không lẻ **D.** Hàm số không chẵn

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Đặt $f(x)=\tan x+2\sin x$

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}$

$\forall x\in D\Rightarrow x\ne\frac{\pi}{2}+k\pi;\ k\in\mathbb{Z}\Rightarrow -x\ne-\frac{\pi}{2}+n\pi;\ n\in\mathbb{Z}\Rightarrow -x\in D$

$\forall x\in D: f(-x)=\tan(-x)+2\sin(-x)=-\left[\tan x+2\sin x\right]=-f(x)$

Vậy hàm số đã cho là hàm số lẻ.

Câu 7. Hàm số $y=\sin x.\cos^3 x$ là:

A. Hàm số lẻ **B.** Hàm số chẵn **C.** Hàm số không chẵn **D.** Hàm số không lẻ

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Đặt $f(x)=\sin x.\cos^3 x$

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$. $\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow -x\in\mathbb{R}$.

$\forall x\in\mathbb{R}: f(-x)=\sin(-x).\cos^3(-x)=-\sin x.\cos^3 x=-f(x)$

Vậy hàm số đã cho là hàm số lẻ.

Câu 8. Hàm số $y=\sin x+3\cos x$ là:

A. Hàm số lẻ **B.** Hàm số chẵn

C. Hàm số không chẵn **D.** Hàm số không chẵn và không lẻ

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Đặt $f(x)=\sin x+3\cos x$

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Ta thấy tồn tại $x_0=\frac{\pi}{2}\in\mathbb{R}:f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$ và $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1$

$\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right)\neq\pm f\left(-\frac{\pi}{2}\right)$. Vậy hàm số không chẵn và không lẻ.

Câu 9. Tập xác định của hàm số $y=\frac{1}{\sin x-1}$ là:

A. $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ **B.** $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ **C.** $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+k2\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}$ **D.** $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Điều kiện: $\sin x-1\neq 0\Leftrightarrow\sin x\neq 1\Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{2}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+k2\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Câu 10. Tìm x để hàm số sau có nghĩa: $y=\sqrt{-\cos x}$.

A. $\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{3\pi}{2}$ **B.** $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$

C. $\frac{\pi}{2}+k2\pi\le x\le\frac{3\pi}{2}+k2\pi;k\in\mathbb{Z}$ **D.** $\frac{\pi}{2}\le x\le\pi$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Biểu thức có nghĩa $\Leftrightarrow-\cos x\ge 0\Leftrightarrow\cos x\le 0\Leftrightarrow\frac{\pi}{2}+k2\pi\le x\le\frac{3\pi}{2}+k2\pi,\ \forall k\in\mathbb{Z}$.

Câu 11. Hàm số nào sau đây là chẵn:

A. $y=4\sin x.\tan 2x$ **B.** $y=3\sin x+\cos x$ **C.** $y=2\sin 2x+3$ **D.** $y=\tan x-\sin x$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Đặt $f(x)=4\sin x\tan 2x$.

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2};\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

$\forall x\in D\Rightarrow x\neq\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2};\ k\in\mathbb{Z}\Rightarrow -x\neq-\frac{\pi}{4}-k\frac{\pi}{2};\ k\in\mathbb{Z}\Rightarrow -x\in D$

$\forall x\in D:f(-x)=4\sin(-x)\tan(-2x)=4\sin x\tan 2x=f(x)$

Vậy $f(x)$ là hàm số chẵn trên D.

Câu 12. Hàm số $y=|\sin x|$ có chu kỳ là:

A. 2π **B.** π **C.** 4π **D.** 3π

Hướng dẫn giải

ĐÁ ÁN B.

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $f(x+\pi)=|\sin(x+\pi)|=|-\sin x|=|\sin x|=f(x), \forall x$.

Ta chứng minh π là số dương nhỏ nhất. Giả sử tồn tại số T: $0<T<\pi$ mà $|\sin(x+T)|=|\sin x|\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Cho $x=0\Rightarrow \sin T=0\Rightarrow T=k\pi, k\in\mathbb{R}$.

Vì $0<T<\pi\Rightarrow 0<k\pi<\pi\Rightarrow 0<k<1$. Điều này vô lý vì $k\in\mathbb{Z}$.

Vậy chu kỳ của hàm số là π.

Câu 13. Hàm số $y=\cos x$ đồng biến trong đoạn nào dưới đây:

A. $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ **B.** $[\pi;2\pi]$ **C.** $[-\pi;\pi]$ **D.** $[0;\pi]$

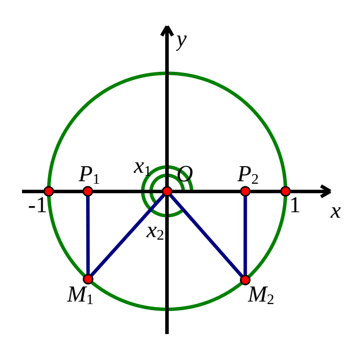
Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Hàm số $y=\cos x$ đồng biến trong đoạn $[\pi;2\pi]$. Thật vậy:

Với $\pi\le x_1\le x_2\le 2\pi\Rightarrow -1\le\overline{OP_1}<\overline{OP_2}\le 1$

$\Rightarrow -1\le\cos x_1<\cos x_2\le 1$.



Câu 14. Hàm số $y=\sin|x|$ có giá trị nhỏ nhất là:

A. 0 **B.** -1 **C.** 1 **D.** Không phải ba số trên

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Hàm số $y=\sin|x|$ là hàm chẵn, ta xét $x>0$.

Khi đó: $y=\sin x$ và $y_{min}=-1$.

Dấu "=" xảy ra, chẳng hạn $x=\frac{3\pi}{2}$.

Câu 15. Hàm số $y=\sin x-\sqrt{3}\cos x$ có giá trị lớn nhất là:

A. $\sqrt{2}$ **B.** 2 **C.** $\sqrt{3}$ **D.** $\frac{1}{2}$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Ta có $y=2\left(\frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)=2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$

Vì $\left|\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right| \le 1,\ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow |y| \le 2 \Rightarrow -2 \le y \le 2$.

Vậy $\max y = 2$. Dấu "=" xảy ra, chẳng hạn $x = \frac{5\pi}{6}$.

Câu 16. Giải phương trình: $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

A. $x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}$.

B. $x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi; x = \frac{4\pi}{3} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}$.

D. $x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Ta có: $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{4\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$.

Câu 17. Giải phương trình: $2\cos 2x + \sqrt{2} = 0$

A. $x = \pm\frac{\pi}{8} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}$.

B. $x = \pm\frac{3\pi}{8} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = \pm\frac{\pi}{8} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$.

D. $x = \pm\frac{3\pi}{8} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Ta có: $2\cos 2x + \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow 2x = \pm\frac{3\pi}{4} + k2\pi \Leftrightarrow x = \pm\frac{3\pi}{8} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Câu 18. Giải phương trình: $\tan(3x+1) = 1$

A. $x = \frac{\pi}{12} - \frac{1}{3} + k\frac{\pi}{3}; k \in \mathbb{Z}$.

B. $x = \pm\frac{\pi}{12} - \frac{1}{3} + k\frac{\pi}{3}; k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = \frac{\pi}{12} - \frac{1}{3} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$.

D. $x = \frac{\pi}{12} - 1 + k\pi; k \in \mathbb{Z}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Ta có: $\tan(3x+1) = 1 \Leftrightarrow \tan(3x+1) = \tan\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow 3x + 1 = \frac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} - \frac{1}{3} + k\frac{\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}$.

Câu 19. Giải phương trình: $\cot 3x = \sqrt{3}$.

A. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$.

B. $x = \frac{\pi}{18} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = \frac{\pi}{18} + k\frac{\pi}{3}; k \in \mathbb{Z}$.

D. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Ta có: $\cot 3x = \sqrt{3} \Leftrightarrow \cot 3x = \cot\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{6} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{18} + k\frac{\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}$.

Câu 20. Giải phương trình: $\sin(2x+1) = -\frac{1}{2};\ 0 < x < \pi$.

A. $x = -\frac{1}{2} + \frac{11\pi}{12}; x = -\frac{1}{2} + \frac{7\pi}{12}$.

B. $x = -\frac{1}{2} + \frac{\pi}{6}$.

C. $x = \frac{\pi}{12}$.

D. $x = -\frac{1}{2} + \frac{\pi}{12}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Ta có: $\sin(2x+1) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin(2x+1) = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x+1 = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 2x+1 = \pi + \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{12} - \frac{1}{2} + k\pi \\ x = \frac{7\pi}{12} - \frac{1}{2} + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$.

Vì $0 < x < \pi$ nên $x = \frac{11\pi}{12} - \frac{1}{2};\ x = \frac{7\pi}{12} - \frac{1}{2}$.

Câu 21. Giải phương trình: $\cos(x^2+1) = 0$.

A. $x = \pm\sqrt{\pi + k2\pi}; k \in \mathbb{N}$.

B. $x = \pm\sqrt{\frac{\pi}{2} - 1 + k\pi}; k \in \mathbb{N}$.

C. $x = \pm\sqrt{\frac{\pi}{2} - 1 + k2\pi}; k \in \mathbb{N}$.

D. $x = \sqrt{\frac{\pi}{2} - 1 + k\pi}; k \in \mathbb{N}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Ta có: $\cos(x^2+1) = 0 \Leftrightarrow \cos(x^2+1) = \cos\frac{\pi}{2}$

$\Leftrightarrow x^2 + 1 = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x^2 = \frac{\pi}{2} - 1 + k\pi \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{\pi}{2} - 1 + k\pi},\ k \in \mathbb{Z}$.

Câu 22. Giải phương trình: $\tan(x^2 + 2x + 3) = \tan 2$.

A. $x = -1 \pm \sqrt{k\pi}; k \in \mathbb{Z}$.

B. $x = -1 \pm \sqrt{k\pi}; k \in \mathbb{N}$.

C. $x = -1 \pm k\pi; k \in \mathbb{Z}$.

D. $x = -1 \pm k\sqrt{\pi}; k \in \mathbb{Z}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Ta có: $\tan(x^2 + 2x + 3) = \tan 2 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 3 = 2 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow (x+1)^2 = k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x + 1 = \pm\sqrt{k\pi},\ k \in \mathbb{N} \Leftrightarrow x = -1 \pm \sqrt{k\pi},\ k \in \mathbb{N}$.

Câu 23. Điều kiện của m để phương trình $\sin^2 x = \frac{3-m}{4}$ có nghiệm.

A. $-1 \le m \le 3$ **B.** $-1 \le m \le 7$ **C.** $m \le 3$ **D.** $-4 \le m \le 3$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Điều kiện: $0 \le \sin^2 x \le 1 \Leftrightarrow 0 \le \dfrac{3-m}{4} \le 1 \Rightarrow -1 \le m \le 3$.

Câu 24. Điều kiện của m để phương trình $4\cos^2 x = m+3$ có nghiệm.

A. $m \ge -3$. **B.** $-3 \le m \le 1$. **C.** $m \le 1$. **D.** $-4 \le m \le -2$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Ta có: $0 \le \cos^2 x \le 1 \Rightarrow 0 \le 4\cos^2 x \le 4$

$\Rightarrow 0 \le m+3 \le 4 \Rightarrow -3 \le m \le 1$.

Câu 25. Điều kiện của m để phương trình $3\sin x + m - 1 = 0$ có nghiệm.

A. $-2 \le m \le 1$. **B.** $-2 \le m \le 2$. **C.** $-2 \le m \le 4$. **D.** $-1 \le m \le 4$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Ta có: $-1 \le \sin x \le 1 \Leftrightarrow -3 \le 3\sin x \le 3$

$\Rightarrow -3 \le 1-m \le 3 \Leftrightarrow -2 \le m \le 4$.

Câu 26. Điều kiện của m để phương trình $2m\sin x + 1 = 3m$ có nghiệm.

A. $\frac{1}{5} \le m \le 1$. **B.** $\frac{1}{5} \le m \le \frac{1}{2}$. **C.** $\frac{1}{5} \le m \le \frac{2}{3}$. **D.** $\frac{1}{2} \le m \le 1$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Ta có: $2m\sin x + 1 = 3m \Leftrightarrow \sin x = \dfrac{3m-1}{2m} \left(m \ne 0\right)$

(Trường hợp $m = 0$ phương trình vô nghiệm)

Vì $-1 \le \sin x \le 1 \Rightarrow -1 \le \dfrac{3m-1}{2m} \le 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3m-1}{2m} \ge -1 \\ \dfrac{3m-1}{2m} \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3m-1}{2m} + 1 \ge 0 \\ \dfrac{3m-1}{2m} - 1 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{5m-1}{2m} \ge 0 \\ \dfrac{m-1}{2m} \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{5} \le m \le 1$$

Câu 27. Hai phương trình nào sau đây tương đương?

A. $x = 0$ và $\tan\left(\sin x\right) = 0$. **B.** $\cos^2 2x = 1$ và $\sin 2x = 0$.

C. $\cos 2x = 0$ và $\sin 2x = 1$. **D.** $\sin 2x = 0$ và $\cos 2x = -1$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Ta có: $\cos^2 2x = 1 \Leftrightarrow 1 - \cos^2 2x = 0 \Leftrightarrow \sin^2 2x = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = 0$.

Câu 28. Giải phương trình: $\left|\sin x + \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$.

A. $x = k\pi; k \in \mathbb{Z}$.

B. $x = k\pi;\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = \pm\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}$.

D. $x = \pm\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2} + \pi + k2\pi; k \in \mathbb{Z}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Ta có: $\left|\sin x + \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ \sin x + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \sin x = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$.

Câu 29. Giải phương trình: $\tan^2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 3$.

A. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$.

B. $x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi;\ x = -\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$.

D. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Ta có: $\tan^2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 3 \Leftrightarrow \tan\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \pm\sqrt{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + k\pi \\ x + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{3} + k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$.

Câu 30. Giải phương trình: $\sin\left(x^2 - 4x\right) = 0$.

A. $x = 2 \pm \sqrt{4 + k2\pi}; k \in \mathbb{N}$.

B. $x = 2 \pm \sqrt{4 + k\pi}; k \in \mathbb{Z}; k \geq -1$.

C. $x = 4 + k\pi; k \in \mathbb{Z}$.

D. $x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + k\pi}}{2}; k \in \mathbb{Z}; k \geq -1$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Ta có: $\sin\left(x^2 - 4x\right) = 0 \Leftrightarrow \sin\left(x^2 - 4x\right) = \sin 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x = k\pi \Leftrightarrow x^2 - 4x - k\pi = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 4 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Điều kiện: $4 + k\pi \geq 0 \Leftrightarrow k \geq -1$ và $k \in \mathbb{Z}$.

Vậy $x - 2 = \pm\sqrt{4 + k\pi};\ k \in \mathbb{Z},\ k \geq -1 \Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{4 + k\pi};\ k \in \mathbb{Z},\ k \geq -1$.

Câu 31. Giải phương trình: $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$.

A. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi;\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi;\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}$.

B. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi;\ x = \pm\frac{\pi}{6} + k2\pi;\ k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi; x = \frac{\pi}{3} + k2\pi; x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}$.

D. $x = \pm\frac{\pi}{2} + k\pi; x = \frac{\pi}{3} + k2\pi;\ k \in \mathbb{Z}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Đặt $u=\sin x;\ |u|\le 1$. Ta có phương trình: $2u^2-3u+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=1\\u=\frac{1}{2}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=1\\\sin x=\frac{1}{2}\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=\sin\frac{\pi}{2}\\\sin x=\sin\frac{\pi}{6}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\\x=\frac{\pi}{6}+k2\pi\\x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.,\ k\in\mathbb{Z}.$

Câu 32. Giải phương trình: $2\cos^2x+7\sin x-5=0$.

A. $x=\pm\frac{\pi}{6}+k2\pi;\ k\in\mathbb{Z}$.

B. $x=\frac{\pi}{6}+k2\pi;\ x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi;\ k\in\mathbb{Z}$.

C. $x=\frac{\pi}{3}+k2\pi;x=\frac{2\pi}{3}+k2\pi;k\in\mathbb{Z}$.

D. $x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi;\ k\in\mathbb{Z}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Ta có: $2\cos^2x+7\sin x-5=0\Leftrightarrow 2\left(1-\sin^2x\right)+7\sin x-5=0\Leftrightarrow 2\sin^2x-7\sin x+3=0$.

Đặt $u=\sin x;\ |u|\le 1$. Ta có phương trình $2u^2-7u+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=3\ (\text{loại})\\u=\frac{1}{2}\ (\text{nhận})\end{array}\right.$

Vậy $\sin x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\sin x=\sin\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{6}+k2\pi\\x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.,\ k\in\mathbb{Z}.$

Câu 33. Giải phương trình: $\cos 2x+3\sin x=2$.

A. $x=\frac{\pi}{2}+k2\pi;\ x=\pm\frac{\pi}{6}+k2\pi;\ k\in\mathbb{Z}$.

B. $x=\frac{\pi}{2}+k2\pi;x=\frac{\pi}{3}+k2\pi;x=\frac{2\pi}{3}+k2\pi;k\in\mathbb{Z}$.

C. $x=\frac{\pi}{2}+k2\pi;\ x=\frac{\pi}{6}+k2\pi;\ x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi;k\in\mathbb{Z}$.

D. $x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi;\ x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi;\ x=\frac{7\pi}{6}+k2\pi;k\in\mathbb{Z}$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Ta có: $\cos 2x+3\sin x=2\Leftrightarrow 1-2\sin^2x+3\sin x-2=0\Leftrightarrow 2\sin^2x-3\sin x+1=0$ (Xem bài 31).

Câu 34. Giải phương trình: $\cos 2x+\cos x+1=0$.

A. $x=\frac{\pi}{2}+k2\pi;\ x=\pm\frac{2\pi}{3}+k2\pi;\ k\in\mathbb{Z}$.

B. $x=\pm\frac{\pi}{2}+k2\pi;\ x=\pm\frac{2\pi}{3}+k2\pi;\ k\in\mathbb{Z}$.

C. $x=\frac{\pi}{2}+k\pi;\ x=\pm\frac{2\pi}{3}+k2\pi;k\in\mathbb{Z}$.

D. $x=\frac{\pi}{2}+k\pi;\ x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi;\ k\in\mathbb{Z}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Ta có: $\cos 2x+\cos x+1=0\Leftrightarrow 2\cos^2 x-1+\cos x+1=0\Leftrightarrow \cos x\left(2\cos x+1\right)=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \cos x=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}.$$

Câu 35. Giải phương trình: $\tan^3 x+\dfrac{1}{\cos^2 x}-3\cot\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=4$.

A. $x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi;\ x=\dfrac{\pi}{3}+k\pi;\ k\in\mathbb{Z}$.

B. $x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi;\ x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k\pi;\ k\in\mathbb{Z}$.

C. $x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi;\ x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k\pi; k\in\mathbb{Z}$.

D. $x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi;\ x=\pm\dfrac{\pi}{6}+k\pi;\ k\in\mathbb{Z}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Ta có: $\tan^3 x+\dfrac{1}{\cos^2 x}-3\cot\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=4\Leftrightarrow \tan^3 x+\left(1+\tan^2 x\right)-3\tan x=4$ $\quad(*)$

Điều kiện: $\cos x\neq 0\Leftrightarrow x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Khi đó: $(*)\Leftrightarrow \tan^3 x+\tan^2 x-3\tan x-3=0$.

Đặt $t=\tan x$. Ta có: $t^3+t^2-3t-3=0\Leftrightarrow t^2\left(t+1\right)-3\left(t+1\right)=0\Leftrightarrow\left(t+1\right)\left(t^2-3\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1\\ t=\pm\sqrt{3}\end{array}\right.$

Vậy $x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi;\ x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k\pi;\ k\in\mathbb{Z}$ (thỏa điều kiện đã cho).

Câu 36. Giải phương trình: $\cos x+\cos\dfrac{x}{2}+1=0$.

A. $x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi;\ x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k\pi;\ k\in\mathbb{Z}$.

B. $x=\pm\dfrac{\pi}{4}+k\pi;\ x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k\pi;\ k\in\mathbb{Z}$.

C. $x=\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{2};\ x=\pm\dfrac{\pi}{6}+k\pi; k\in\mathbb{Z}$.

D. $x=\pi+k2\pi;\ x=\pm\dfrac{4\pi}{3}+k4\pi;\ k\in\mathbb{Z}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Ta có: $\cos x+\cos\dfrac{x}{2}+1=0\Leftrightarrow 2\cos^2\dfrac{x}{2}-1+\cos\dfrac{x}{2}+1=0$.

Đặt $u=\cos\dfrac{x}{2};\ |u|\le 1$. Ta có: $2u^2+u=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=0\\ u=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\cos\dfrac{x}{2}=0\\ \cos\dfrac{x}{2}=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\dfrac{x}{2}=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ \dfrac{x}{2}=\pm\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pi+k2\pi\\ x=\pm\dfrac{4\pi}{3}+k4\pi\end{array}\right.; k\in\mathbb{Z}.$$

Câu 37. Giải phương trình: $\sin 3x+1=2\sin^2 x$.

A. $x=-\frac{\pi}{10}+k2\pi;\ k\in\mathbb{Z}$.

B. $x=-\frac{\pi}{10}+k\frac{\pi}{5};\ k\in\mathbb{Z}$.

C. $x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi;\ k\in\mathbb{Z}$.

D. $x=-\frac{\pi}{10}+k\frac{2\pi}{5};\ k\in\mathbb{Z}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Ta có: $\sin 3x+1=2\sin^2 x\Leftrightarrow \sin 3x=2\sin^2 x-1\Leftrightarrow \sin 3x=-\cos 2x\Leftrightarrow \sin(-3x)=\cos 2x$

$$\Leftrightarrow \sin(-3x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-3x=\frac{\pi}{2}-2x+k2\pi\\ -3x=\pi-\frac{\pi}{2}+2x+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{2}-k2\pi\\ x=-\frac{\pi}{10}-k\frac{2\pi}{5}\end{array}\right.;k\in\mathbb{Z}$$

$\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{10}+m\frac{2\pi}{5},\ m\in\mathbb{Z}$ (đặt $k=-m$).

Câu 38. Giải phương trình: $1+\sin 3x-\sin x=\cos 2x$.

A. $x=k\pi;\ x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi;\ k\in\mathbb{Z}$.

B. $x=k\pi;\ x=-\frac{\pi}{6}+k\frac{2\pi}{3};\ k\in\mathbb{Z}$.

C. $x=k\pi;x=-\frac{\pi}{6}+k\frac{2\pi}{3};\ k\in\mathbb{Z}$.

D. $x=k\pi;\ x=-\frac{\pi}{9}+k\frac{2\pi}{3};\ k\in\mathbb{Z}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Ta có: $1+\sin 3x-\sin x=\cos 2x\Leftrightarrow(1-\cos 2x)+(\sin 3x-\sin x)=0$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 x+2\cos 2x\sin x=0\Leftrightarrow \sin x(\sin x+\cos 2x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \sin x+\cos 2x=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \sin(-x)=\cos 2x\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \sin(-x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ -x=\frac{\pi}{2}-2x+k2\pi\\ -x=\frac{\pi}{2}+2x+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\\ x=-\frac{\pi}{6}-k\frac{2\pi}{3}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ x=-\frac{\pi}{6}+k\frac{2\pi}{3}\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}.$$

Câu 39. Giải phương trình: $4\sin^3 x+4\sin^2 x=3+3\sin x$.

A. $x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi;\ x=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi;\ k\in\mathbb{Z}$.

B. $x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi;\ x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi;\ k\in\mathbb{Z}$.

C. $x=-\frac{\pi}{2}+k\pi;\ x=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi;\ k\in\mathbb{Z}$.

D. $x=-\frac{\pi}{2}+k\pi;\ x=\pm\frac{\pi}{6}+k2\pi;\ k\in\mathbb{Z}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Ta có: $4\sin^3 x+4\sin^2 x=3+3\sin x\Leftrightarrow 4\sin^2 x(\sin x+1)=3(\sin x+1)\Leftrightarrow(4\sin^2 x-3)(\sin x+1)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4\sin^2 x = 3 \\ \sin x + 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin x = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \\ x = \dfrac{4\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

Câu 40. Giải phương trình: $\tan^3 x - \tan x = 0$.

A. $x = k\pi;\ x = \pm\dfrac{\pi}{4} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$.

B. $x = k2\pi;\ x = \pm\dfrac{\pi}{4} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = k\pi;\ x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$.

D. $x = k\pi;\ x = \pm\dfrac{\pi}{4} + k2\pi;\ k \in \mathbb{Z}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Ta có: $\tan^3 x - \tan x = 0 \Leftrightarrow \tan x\left(\tan^2 x - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = \pm 1 \\ \tan x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$.

Câu 41. Giải phương trình: $\tan^3 x + \tan^2 x - 3\tan x - 3 = 0$.

A. $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi;\ x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$.

B. $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi;\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi;\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$.

D. $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi;\ x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Ta có: $\tan^3 x + \tan^2 x - 3\tan x - 3 = 0 \Leftrightarrow \tan^2 x\left(\tan x + 1\right) - 3\left(\tan x + 1\right) = 0 \Leftrightarrow \left(\tan x + 1\right)\left(\tan^2 x - 3\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = -1 \\ \tan x = \pm\sqrt{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

Câu 42. Giải phương trình: $\cos\left(x + \pi\right) = 1 + \sin\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{2}\right)$.

A. $x = \pi + k2\pi;\ x = \pm\dfrac{4\pi}{3} + k4\pi;\ k \in \mathbb{Z}$.

B. $x = \pi + k2\pi;\ x = \pm\dfrac{4\pi}{3} + k2\pi;\ k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = \pi + k\pi;\ x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi;\ k \in \mathbb{Z}$.

D. $x = \pi + k2\pi;\ x = \pm\dfrac{4\pi}{3} + k\dfrac{\pi}{2};\ k \in \mathbb{Z}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Ta có: $\cos\left(x + \pi\right) = 1 + \sin\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow -\cos x = 1 + \cos\dfrac{x}{2} \Leftrightarrow 2\cos^2\dfrac{x}{2} + \cos\dfrac{x}{2} = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos\frac{x}{2}=0\\ \cos\frac{x}{2}=-\frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ \frac{x}{2}=\pm\frac{2\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pi+k2\pi\\ x=\pm\frac{4\pi}{3}+k4\pi\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}.$$

Câu 43. Giải phương trình: $\tan 5x-\tan x=0$.

A. $x=k\frac{\pi}{4}; k\in\mathbb{Z}$.

B. $x=k\frac{\pi}{2}; k\in\mathbb{Z}$.

C. $x=k\frac{\pi}{4}; k\in\mathbb{Z}; k\neq 2+4m; m\in\mathbb{Z}$.

D. $x=k\pi; k\in\mathbb{Z}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Ta có: $\tan 5x-\tan x=0\Leftrightarrow \tan 5x=\tan x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\cos 5x\neq 0\\ \cos x\neq 0\\ 5x=x+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\neq\frac{\pi}{2}+m\pi\\ x\neq\frac{\pi}{10}+m\frac{\pi}{5};\ m,k\in\mathbb{Z}\\ x=k\frac{\pi}{4}\end{cases}$$

Xét $k\frac{\pi}{4}\neq\frac{\pi}{2}+m\pi\Leftrightarrow k\neq 4m+2,\ \forall m\in\mathbb{Z}$.

$k\frac{\pi}{4}\neq\frac{\pi}{10}+m\frac{\pi}{5}\Leftrightarrow k\neq\frac{2}{5}+\frac{4m}{5}$ (luôn đúng $\forall m\in\mathbb{Z}$).

Vậy $x=k\frac{\pi}{4};\ k\in\mathbb{Z},\ k\neq 4m+2.$

Chú ý: Thực ra, ta chỉ cần đặt $\cos x\neq 0$.

Câu 44. Giải phương trình: $\cot\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=-\tan\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)$.

A. $x=\frac{\pi}{2}+k\pi; k\in\mathbb{Z}$.

B. $x=-\frac{\pi}{3}+k\pi; k\in\mathbb{Z}$.

C. $x=\frac{\pi}{4}+k\pi; k\in\mathbb{Z}$.

D. $x=\frac{\pi}{3}+k\pi; k\in\mathbb{Z}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Ta có: $\cot\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=-\tan\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)\Leftrightarrow \tan\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=\tan\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\qquad (*)$

Điều kiện: $\begin{cases}\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)\neq 0\\ \cos\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)\neq 0\end{cases}$

Khi đó: $(*)\Leftrightarrow\frac{\pi}{3}+x=2x-\frac{\pi}{6}+k\pi\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ (thỏa mãn các điều kiện).

Câu 45. Giải và biện luận phương trình: $\sin^2 x + 2m\sin x + 2m^2 - 2m + 1 = 0$.

A. $m = 1; x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}$.

B. $m = 1; x = \frac{\pi}{2} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}$.

C. Phương trình vô nghiệm $\forall m$.

D. $m = 1; x = -\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Ta có: $\sin^2 x + 2m\sin x + 2m^2 - 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow (\sin x + m)^2 + (m-1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x + m - 9 \\ m - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ m = 1 \end{cases}$.

Câu 46. Giải phương trình: $\sin x + \sqrt{3}\cos x = \sqrt{2}$.

A. $x = -\frac{\pi}{12} + k2\pi;\ x = \frac{5\pi}{12} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$.

B. $x = -\frac{\pi}{12} + k2\pi;\ x = -\frac{5\pi}{12} + k2\pi;\ k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = \frac{\pi}{12} + k2\pi;\ x = -\frac{5\pi}{12} + k2\pi;\ k \in \mathbb{Z}$.

D. $x = -\frac{\pi}{12} + k2\pi;\ x = \frac{5\pi}{12} + k2\pi;\ k \in \mathbb{Z}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Ta có: $\sin x + \sqrt{3}\cos x = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{4}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{12} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{12} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$.

Câu 47. Giải phương trình: $3\sin x + 4\cos x = 4$.

A. $x = k2\pi;\ x = 2\alpha + k2\pi$**; với** $\tan\alpha = \frac{3}{4}; k \in \mathbb{Z}$

B. $x = k\pi;\ x = 2\alpha + k\pi$**; với** $\tan\alpha = \frac{3}{4}; k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = k2\pi;\ x = 2\alpha + k2\pi$**; với** $\tan\alpha = \frac{3}{2}; k \in \mathbb{Z}$.

D. $x = k\pi;\ x = 2\alpha + k\pi$**; với** $\tan\alpha = \frac{3}{2}; k \in \mathbb{Z}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Đặt $t = \tan\frac{x}{2}$ $\left(\cos\frac{x}{2} \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pi + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right)$

Với $x = \pi + k2\pi$, không thỏa phương trình.

Ta có phương trình: $\frac{6t}{1+t^2} + 4.\frac{1-t^2}{1+t^2} = 4 \Leftrightarrow 4t^2 - 3t = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = \frac{3}{4} \end{array}\right.$

Vậy $x = k\pi;\ x = 2\alpha + k2\pi;\ k \in \mathbb{Z}$. Với $\tan\alpha = \frac{3}{4}$.

Câu 48. Giải phương trình: $\sin x+\sqrt{3}\cos x=\sqrt{3}$.

A. $x=k2\pi;\ x=\frac{\pi}{3}+k2\pi;\ k\in\mathbb{Z}$.
B. $x=k\pi;\ x=\frac{2\pi}{3}+k2\pi;\ k\in\mathbb{Z}$.
C. $x=k2\pi;\ x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi;\ k\in\mathbb{Z}$.
D. $x=k\pi;\ x=-\frac{\pi}{3}+k2\pi;\ k\in\mathbb{Z}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Ta có: $\sin x+\sqrt{3}\cos x=\sqrt{3}\Leftrightarrow\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}+k2\pi\\ x+\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=k2\pi\\ x=\frac{\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right.,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Câu 49. Giải phương trình: $\cos x-\sin x=\sqrt{2}\sin 2x$.

A. $x=\frac{3\pi}{4}+k\pi;\ x=\frac{\pi}{12}+k2\pi;\ k\in\mathbb{Z}$.
B. $x=\frac{3\pi}{4}+k2\pi;\ x=-\frac{\pi}{12}+k\frac{2\pi}{3};\ k\in\mathbb{Z}$.
C. $x=\frac{3\pi}{4}+k2\pi;\ x=\frac{\pi}{12}+k\frac{2\pi}{3};\ k\in\mathbb{Z}$.
D. $x=-\frac{3\pi}{4}+k2\pi;\ x=\frac{\pi}{12}+k\frac{2\pi}{3};\ k\in\mathbb{Z}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Ta có: $\cos x-\sin x=\sqrt{2}\sin 2x\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x=\sin 2x\Leftrightarrow\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\sin 2x$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x=\frac{\pi}{4}-x+k2\pi\\ 2x=\frac{3\pi}{4}+x+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{12}+k\frac{2\pi}{3}\\ x=\frac{3\pi}{4}+k2\pi\end{array}\right.,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Câu 50. Giải phương trình: $\cos x-\sqrt{3}\sin x=2\cos 3x$.

A. $x=\frac{\pi}{6}+k\pi;\ x=-\frac{\pi}{12}+k\pi;\ k\in\mathbb{Z}$.
B. $x=\frac{\pi}{6}+k\pi;\ x=-\frac{\pi}{12}+k\frac{\pi}{2};\ k\in\mathbb{Z}$.
C. $x=\frac{\pi}{6}+k2\pi;\ x=-\frac{\pi}{12}+k\pi;\ k\in\mathbb{Z}$.
D. $x=\frac{\pi}{6}+k\pi;\ x=\frac{\pi}{12}+k\frac{\pi}{2};\ k\in\mathbb{Z}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Ta có: $\cos x-\sqrt{3}\sin x=2\cos 3x\Leftrightarrow\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x=\cos 3x\Leftrightarrow\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos 3x$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x=x+\frac{\pi}{3}+k2\pi\\ 3x=-x-\frac{\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{6}+k\pi\\ x=-\frac{\pi}{12}+k\frac{\pi}{2}\end{array}\right.,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Câu 51. Giải phương trình: $\cos 3x-\sin x=\sqrt{3}\left(\cos x-\sin 3x\right)$.

A. $x=\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{2}; x=\frac{\pi}{12}+k2\pi; k\in\mathbb{Z}$.

B. $x=\frac{\pi}{8}+k\pi; x=\frac{\pi}{12}+k\pi; k\in\mathbb{Z}$.

C. $x=\frac{\pi}{8}+k\pi; x=\frac{\pi}{12}+k2\pi; k\in\mathbb{Z}$.

D. $x=\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{2}; x=\frac{\pi}{12}+k\pi; k\in\mathbb{Z}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Ta có: $\cos3x-\sin x=\sqrt{3}(\cos x-\sin3x)\Leftrightarrow\cos3x+\sqrt{3}\sin3x=\sqrt{3}\cos x+\sin x$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{2}\cos3x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin3x=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x\Leftrightarrow\cos\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x-\frac{\pi}{3}=x-\frac{\pi}{6}+k2\pi\\3x-\frac{\pi}{3}=-x+\frac{\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{12}+k\pi\\x=\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{2}\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}.$$

Câu 52. Giải phương trình: $\sin3x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin5x+\frac{1}{2}\cos5x=0$.

A. $x=75^o+k180^o; x=-3^o75'+k45^o; k\in\mathbb{Z}$

B. $x=75^o+k360^o; x=-3^o75'+k45^o; k\in\mathbb{Z}$.

C. $x=75^o+k180^o; x=-3^o75'+k90^o; k\in\mathbb{Z}$.

D. $x=75^o+k180^o; x=-3^o75'+k180^o; k\in\mathbb{Z}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Ta có: $\sin3x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin5x+\frac{1}{2}\cos5x=0\Leftrightarrow\sin3x+\sin\left(5x+30^o\right)=0\Leftrightarrow\sin\left(5x+30^o\right)=\sin(-3x)$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}5x+30^o=-3x+k360^o\\5x+30^o=180^o+3x+k360^o\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-3^o75'+k45^o\\x=75^o+k180^o\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}.$$

Câu 53. Giải phương trình: $\sin9x+\sqrt{3}\cos7x=\sin7x+\sqrt{3}\cos9x$.

A. $x=\frac{\pi}{16}+k\frac{\pi}{2}; x=k\pi; k\in\mathbb{Z}$.

B. $x=\frac{\pi}{16}+k\frac{\pi}{8}; x=k2\pi; k\in\mathbb{Z}$.

C. $x=\frac{\pi}{16}+k\frac{\pi}{4}; x=k\pi; k\in\mathbb{Z}$.

D. $x=\frac{\pi}{16}+k\frac{\pi}{8}; x=k\pi; k\in\mathbb{Z}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Ta có: $\sin9x+\sqrt{3}\cos7x=\sin7x+\sqrt{3}\cos9x\Leftrightarrow\sin9x-\sqrt{3}\cos9x=\sin7x-\sqrt{3}\cos7x$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{2}\sin9x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos9x=\frac{1}{2}\sin7x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos7x\Leftrightarrow\sin\left(9x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(7x-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}9x-\frac{\pi}{3}=7x-\frac{\pi}{3}+k2\pi\\9x-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}-7x+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=k\pi\\x=\frac{\pi}{16}+k\frac{\pi}{8}\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}.$$

Câu 54. Giải phương trình: $4\cos x=\sqrt{3}\cot x+1$.

A. $x=\frac{\pi}{3}+k2\pi;\ x=\frac{2\pi}{9}+k\frac{2\pi}{3};\ k\in\mathbb{Z}$.

B. $x=\frac{\pi}{3}+k2\pi;\ x=\frac{2\pi}{9}+k2\pi;\ k\in\mathbb{Z}$.

C. $x=\frac{\pi}{3}+k\pi;\ x=\frac{2\pi}{9}+k\frac{2\pi}{3};\ k\in\mathbb{Z}$.

D. $x=\frac{\pi}{3}+k2\pi;\ x=-\frac{2\pi}{9}+k\frac{2\pi}{3};\ k\in\mathbb{Z}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Ta có: $4\cos x=\sqrt{3}\cot x+1$ $(*)$

Điều kiện: $\sin x\ne 0\Leftrightarrow x\ne k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. Khi đó:

$$(*)\Leftrightarrow 4\cos x=\sqrt{3}\frac{\cos x}{\sin x}+1\Leftrightarrow 4\cos x\sin x=\sqrt{3}\cos x+\sin x$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x\Leftrightarrow \sin 2x=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x=x+\frac{\pi}{3}+k2\pi\\2x=\frac{2\pi}{3}-x+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{3}+k2\pi\ (\text{nhận})\\x=\frac{2\pi}{9}+k\frac{2\pi}{3}\ (\text{nhận})\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}.$$

Câu 55. Giải phương trình: $\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x\right)^2=5+\cos\left(4x+\frac{\pi}{3}\right)$.

A. $x=\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{2};\ k\in\mathbb{Z}$.

B. $x=\frac{\pi}{6}+k\pi;\ k\in\mathbb{Z}$.

C. $x=\frac{\pi}{6}+k2\pi;\ k\in\mathbb{Z}$.

D. $x=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi;\ k\in\mathbb{Z}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Ta có: $\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x\right)^2=5+\cos\left(4x+\frac{\pi}{3}\right)\Leftrightarrow 4\sin^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=5+\cos\left(4x+\frac{\pi}{3}\right)$.

Xét vế trái: $0\le\sin^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\le 1\Leftrightarrow 0\le 4\sin^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\le 4$

Xét vế phải: $-1\le\cos\left(4x+\frac{\pi}{3}\right)\le 1\Rightarrow 4\le 5+\cos\left(4x+\frac{\pi}{3}\right)\le 6$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}\sin^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=1\\\cos\left(4x+\frac{\pi}{3}\right)=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi\\4x+\frac{\pi}{3}=\pi+n2\pi\end{cases};k,n\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Câu 56. Tìm m để phương trình sau có nghiệm: $(m-1)\cos x+(m+1)\sin x=2m$

A. $|m|\le 1$ **B.** $1-\sqrt{2}<m<1+\sqrt{2}$ **C.** $1-\sqrt{2}\le m\le 1+\sqrt{2}$ **D.** $1-\sqrt{2}<m<\sqrt{2}-1$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Điều kiện có nghiệm: $(m-1)^2+(m+1)^2 \ge (2m)^2 \Leftrightarrow m^2 \le 1 \Leftrightarrow |m| \le 1$.

Câu 57. Tìm m để phương trình sau có nghiệm: $m\sin x+(m-1)\cos x=3$

A. $\frac{1-\sqrt{5}}{2} \le m \le \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

B. $m \le \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ **hoặc** $m \ge \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

C. $\frac{1-\sqrt{5}}{4} \le m \le \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

D. $m \le \frac{1-\sqrt{5}}{4}$ **hoặc** $m \ge \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Điều kiện có nghiệm: $m^2+(m-1)^2 \ge 9 \Leftrightarrow 2m^2-2m-8 \ge 0 \Leftrightarrow m^2-m-4 \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \ge \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ m \le \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$.

Câu 58. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số: $y=\frac{\sin x+2\cos x+1}{\sin x+\cos x+2}$

A. $\max y=1;\ \min y=-2$.

B. $\max y=1;\ \min y=-3$.

C. $\max y=2;\ \min y=-1$.

D. $\max y=3;\ \min y=-1$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Xét: $y=\frac{\sin x+2\cos x+1}{\sin x+\cos x+2}$ $\quad (*)$

Vì $-\sqrt{2} \le \sin x+\cos x \le \sqrt{2} \Leftrightarrow \sin x+\cos x+2>0,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Vậy: $(*) \Leftrightarrow (y-1)\sin x+(y-2)\cos x=1-2y$.

Ta xét đây là phương trình bậc nhất đối với $\sin x$ và $\cos x$; y là tham số. Điều kiện có nghiệm: $(y-1)^2+(y-2)^2 \ge (1-2y)^2 \Leftrightarrow y^2+y-2 \le 0 \Leftrightarrow -2 \le y \le 1$.

Vậy giá trị lớn nhất của y là 1, đạt được tại, chẳng hạn $x=0$.

Giá trị nhỏ nhất của y là -2, đạt được tại, chẳng hạn $x=2\alpha$, với $\tan\alpha=-3$.

Câu 59. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số: $y=(3\sin x+4\cos x)(3\cos x-4\sin x)+1$

A. $\max y=\frac{27}{4};\ \min y=-\frac{23}{4}$.

B. $\max y=\frac{27}{2};\ \min y=-\frac{23}{2}$.

C. $\max y=\frac{23}{2};\ \min y=-\frac{27}{2}$.

D. $\max y=\frac{23}{4};\ \min y=-\frac{27}{4}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Ta có: $y=(3\sin x+4\cos x)(3\cos x-4\sin x)+1 \Leftrightarrow y=-\frac{7}{2}\sin 2x+12\cos 2x+1$

$\Leftrightarrow 2y-2=-7\sin 2x+24\cos 2x \qquad (*)$

Phương trình $(*)$ có nghiệm $\Leftrightarrow (-7)^2+24^2 \geq (2y-2)^2 \Leftrightarrow -\frac{23}{2} \leq y \leq \frac{27}{2}$.

Vậy $\max y=\frac{27}{2}$; $\min y=-\frac{23}{2}$. (Dấu "=" luôn xảy ra).

Câu 60. Tìm tập xác định của hàm số $y=\frac{\sin x+\cos x-1}{\sin x-\cos x+3}$

A. $\mathbb{R}$.

B. $\mathbb{R}\setminus\left\{\pm\frac{\pi}{3}\right\}$.

C. $\mathbb{R}\setminus\left\{\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi; k\in\mathbb{Z}\right\}$.

D. $\mathbb{R}\setminus\left\{\pm\frac{\pi}{4}+k2\pi; k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Điều kiện: $\sin x-\cos x+3\neq 0$

Ta có: $|\sin x-\cos x|\leq\sqrt{2}\Rightarrow \sin x-\cos x+3>0, \forall x\in\mathbb{R}$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}$.

Câu 61. Giải phương trình: $4\sin^2 x+6\sqrt{3}\sin x.\cos x-2\cos^2 x=4$.

A. $x=\frac{\pi}{2}+k\pi;\ x=\frac{\pi}{3}+k\pi;\ k\in\mathbb{Z}$.

B. $x=\frac{\pi}{2}+k\pi;\ x=\frac{\pi}{6}+k\pi;\ k\in\mathbb{Z}$.

C. $x=\frac{\pi}{2}+k2\pi;\ x=\frac{\pi}{3}+k\pi;\ k\in\mathbb{Z}$.

D. $x=\frac{\pi}{2}+k\pi;\ x=\frac{\pi}{6}+k2\pi;\ k\in\mathbb{Z}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Ta có: $4\sin^2 x+6\sqrt{3}\sin x.\cos x-2\cos^2 x=4 \qquad (*)$

- $\cos x=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$ (là nghiệm của phương trình (*))
- $\cos x\neq 0\Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$. Chia hai vế của phương trình (*) cho $\cos^2 x\neq 0$, ta được:

$\tan x=\frac{\sqrt{3}}{3}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$ (thỏa mãn điều kiện $\cos x\neq 0$).

Câu 62. Giải phương trình: $\sqrt{3}\cos^2 x+2\sin x.\cos x-\sqrt{3}\sin^2 x-\sqrt{2}=0$.

A. $x=\frac{5\pi}{12}+k2\pi;\ x=-\frac{\pi}{12}+k2\pi;\ k\in\mathbb{Z}$.

B. $x=\frac{5\pi}{24}+k2\pi;\ x=-\frac{\pi}{24}+k2\pi;\ k\in\mathbb{Z}$.

C. $x=\frac{5\pi}{24}+k\pi;\ x=-\frac{\pi}{24}+k\pi;\ k\in\mathbb{Z}$.

D. $x=-\frac{5\pi}{24}+k\pi;\ x=\frac{\pi}{24}+k\pi;\ k\in\mathbb{Z}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Ta có: $\sqrt{3}\cos^2 x+2\sin x.\cos x-\sqrt{3}\sin^2 x-\sqrt{2}=0\Leftrightarrow\sqrt{3}\cos 2x+\sin 2x=\sqrt{2}\Leftrightarrow\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{4}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{5\pi}{24}+k\pi \\ x=-\frac{\pi}{24}+k\pi \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}.$

Câu 63. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số: $y=\frac{2\cos^2 x+4\sin x.\cos x+2}{6-\sin 2x-4\sin^2 x}$

A. $\max y=2;\ \min y=-\frac{2}{11}$.

B. $\max y=2;\ \min y=\frac{2}{11}$.

C. $\max y=\frac{2}{11};\ \min y=-2$.

D. $\max y=1;\ \min y=\frac{2}{11}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Ta có: $y=\frac{\cos 2x+2\sin 2x+3}{2\cos 2x-\sin 2x+4}$ (1)

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$ (vì $\left|2\cos 2x-\sin 2x\right|\le\sqrt{5},\ \forall x$)

$(1)\Leftrightarrow (y+2)\sin 2x+(1-2y)\cos 2x=4y-3$

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow (y+2)^2+(1-2y)^2\ge(4y-3)^2\Leftrightarrow 11y^2-24y+4\le 0\Leftrightarrow\frac{2}{11}\le y\le 2$.

$y_{max}=2;\ y_{min}=\frac{2}{11}$. Dấu "=" luôn xảy ra.

Câu 64. Tìm m để phương trình sau vô nghiệm: $4\cos^2 x-\sqrt{3}\sin 2x+2\sin^2 x=m$

A. $1<m<5$.

B. $m<1$ hoặc $m>5$.

C. $m<1$ hoặc $m>3$.

D. $m<-1$ hoặc $m>3$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Phương trình được viết lại như sau: $\cos 2x-\sqrt{3}\sin 2x=m-3$.

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow 1^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2\ge(m-3)^2\Leftrightarrow m^2-6m+5\le 0\Leftrightarrow 1\le m\le 5$.

Vậy phương trình vô nghiệm khi $\left[\begin{array}{l} m>5 \\ m<1 \end{array}\right.$.

Câu 65. Tìm m để phương trình sau vô nghiệm: $m\sin^2 x+2m\sin x.\cos x-1=0$

A. $-1-\sqrt{5}\le m\le -1+\sqrt{5}$.

B. $\frac{-1-\sqrt{5}}{4}\le m\le\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

C. $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\le m\le\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

D. $m\le\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ hoặc $m\ge\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Phương trình được viết lại như sau: $2m\sin 2x-m\cos 2x=2-m$.

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow (2m)^2+(-m)^2\ge(2-m)^2\Leftrightarrow m^2+m-1\le 0\Leftrightarrow\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\le m\le\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.